

道の開通・長方形

図1のように、同じ大きさの正方形を長方形のかたちに組みあわせて、道を作ります。次に、図2のように正方形を1つ選んで、縦に通る道を1本増やします。

図1

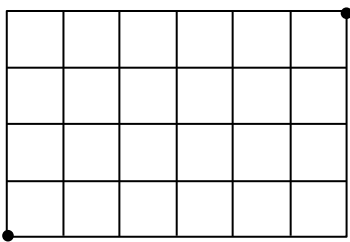
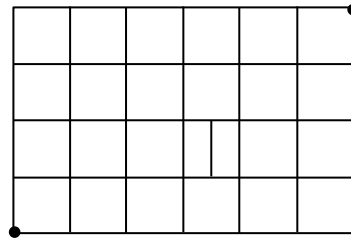


図2



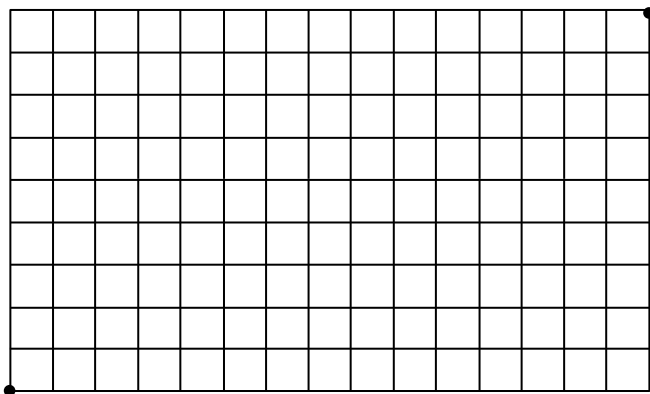
(1) 図1の道について次の問いに答えなさい。

① 図1の左下の●から右上の●まで、遠回りせずに進む道順は、何通りありますか。

② 図2のように道を1本増やすと、左下の●から右上の●まで、遠回りせずに進む道順は、何通りになりますか。

(2) 図3において、正方形を1つ選んで道を1本増やしたところ、左下の●から右上の●まで、遠回りせずに進む道順は105105通り増えました。選んだ正方形として考えられるものすべてに○をつけなさい。

図3





道の開通・長方形 (1) ① 2 1 0.通り (2) 2 3 4 通り (2) 解説参照

(1) 解説省略

(2) まず、(1) ②を例に考えます。新たに増やした道を通る場合、図①の太線部分を必ず通過します。かげをつけた部分の進み方は、全部で4辺進むうちの1回だけ上に進むので4通り、

斜線部分の進み方は、全部で4辺進むうちの2回だけ上に進むので、 $4C2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ (通り) です。

あわせて $4 \times 6 = 24$ (通り) の道順になるので、 $210 + 24 = 234$ (通り) です。同様の方法で (2) を考えます。

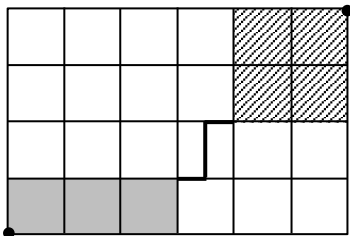
素因数分解をすると、 $105105 = 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 13$ です。図②のかげをつけた部分の道順を $\square C \circ$ 、斜線部分の道順を $\triangle C \star$ とすると、次のことが成り立ちます。

$$\square C \circ \times \triangle C \star = 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 13,$$

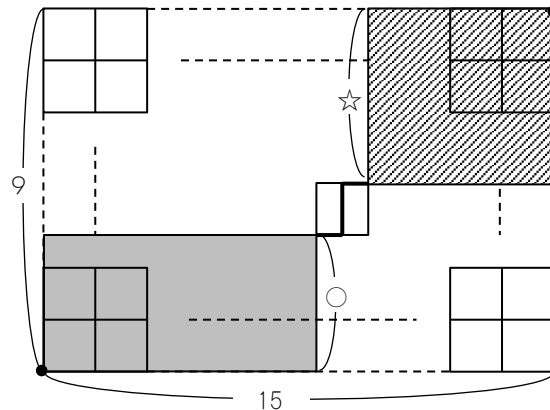
$$\circ + \star = 9 - 1 = 8,$$

$$\square + \triangle = 9 + 15 - 2 = 22$$

図①



図②



まず、素因数の13に注目します。13を $\square C \circ$ の素因数とすると、 \square は13以上の整数なので、 (\square, \triangle) の組みあわせは、 $(13, 9), (14, 8), (15, 7), (16, 6)$ が考えられます。素因数の17が含まれないことから、 $(17, 5), (18, 4), (19, 3), \dots$ では、17が残るので、不適切です。

次に、7が2つ含まれることを考えます。13 $C \circ$ が素因数として7を含むことはあり得ない(13 $C 7$ は13 $C 6$ と等しく、素因数の7を含まない。13 $C 8$ などと同じ)ので、 $(13, 9)$ で7が2つ含まれるのは不可能です。また、 $(16, 6)$ でも7が2つ含まれるのは不可能です。

よって、 $(14, 8), (15, 7)$ の2つの場合を考えます。



最難関問題

$(\square, \triangle) = (14, 8)$ の場合

$\square C \circ \times \triangle C \star = 14 C \circ \times 8 C \star = 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 13$ となるので、素因数の 11 は $14 C \circ$ に含まれます。よって、 \circ は 4 以上の整数です。

$$14 C 4 \times 8 C 4 = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 13,$$

$$14 C 5 \times 8 C 3 = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$$

は素因数 5 が消えるので不適切、
 $14 C 6 \times 8 C 2, 14 C 7 \times 8 C 1$ も素因数の 5 が消えるので不適切です。

$(\square, \triangle) = (15, 7)$ の場合

$\square C \circ \times \triangle C \star = 15 C \circ \times 7 C \star = 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 13$ となるので、素因数の 11 は $15 C \circ$ に含まれます。よって、 \circ は 5 以上の整数です。

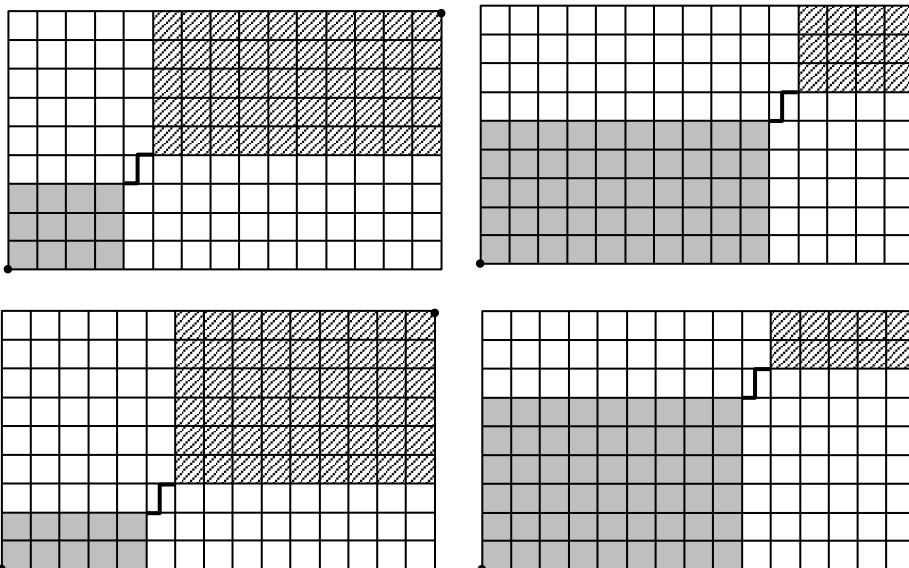
$$15 C 5 \times 7 C 3 = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 13,$$

$$15 C 6 \times 7 C 2 = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11 \times 13,$$

$15 C 7 \times 7 C 1$ は素因数の 7 が 2 個残らないので、不適切です。

以上より、条件を満たすのは $15 C 5 \times 7 C 3$ と $15 C 6 \times 7 C 2$ です。図③の 4 通りがこれにあてはまるので、図④が答えとなります。

図③



図④ (解答)

