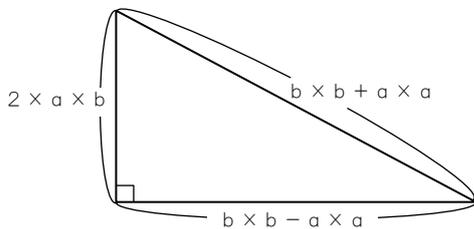


ピタゴラス三角形と内接円・1

3 : 4 : 5 や、5 : 12 : 13 のように、3 辺の長さの比が整数の比となる三角形を、ピタゴラス三角形といいます。ピタゴラス三角形の3 辺の比は、ある2 つの整数 a 、 b から、

$(2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (b \times b + a \times a)$ の形で与えることができます。

例えば、 $a = 1$ 、 $b = 2$ のとき、 $(2 \times 1 \times 2) : (2 \times 2 - 1 \times 1) : (2 \times 2 + 1 \times 1) = 4 : 3 : 5$ となります。



必要であれば以上のことを利用して、次の問いに答えなさい。

(1) 図1は、ある三角形 ABC の边上の点 D 、 E 、 F に円周が接する円を描いたものです。 $AB = 8 \text{ cm}$ 、 $BC = 11 \text{ cm}$ 、 $CA = 9 \text{ cm}$ のとき、 AD の長さは何 cm ですか。

(2) 図2は、ある直角三角形 ABC の边上の点 D 、 E 、 F に円周が接する円を描いたものです。 $BC = 247 \text{ cm}$ 、 $CA = 265 \text{ cm}$ で、円の半径が 39 cm のとき、 AB の長さは何 cm ですか。

(3) (2) のように、3 辺の長さの比が整数比となる直角三角形 ABC の边上の点 D 、 E 、 F に円周が接する円について考えます。円の半径が、辺 AB あるいは BC の $\frac{3}{17}$ 倍の長さのとき、直角三角形 ABC の3 辺の長さの比として考えられるものを1 つ答えなさい。

図1

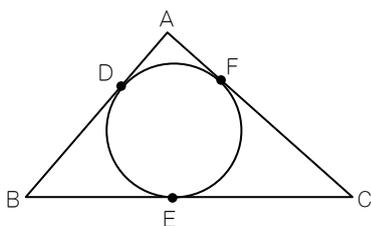
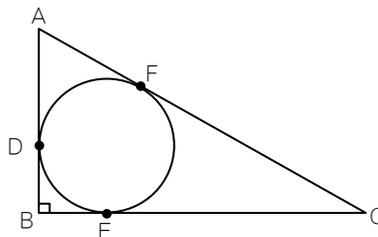


図2





ピタゴラス三角形と内接円・1

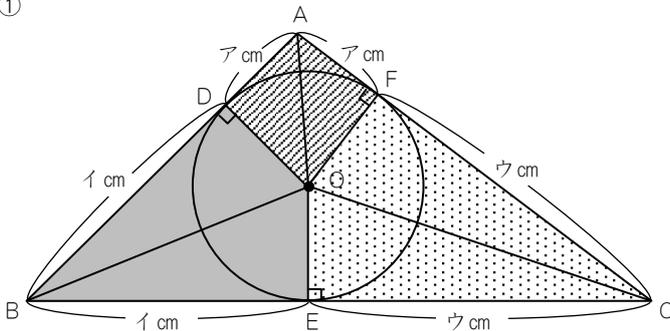
(1) 3 cm (2) 96 cm (3) 84 : 187 : 205 (比の順序不問)

(1) 図①のように円の中心OとD, E, Fを結ぶと, それぞれの辺と垂直に交わる線になります。斜線部分の三角形OADとOAF, 影をつけた三角形OBDとOBE, あみ目部分の三角形OCEとOCFはそれぞれ合同なので, ア~ウの長さの関係が成り立ちます。

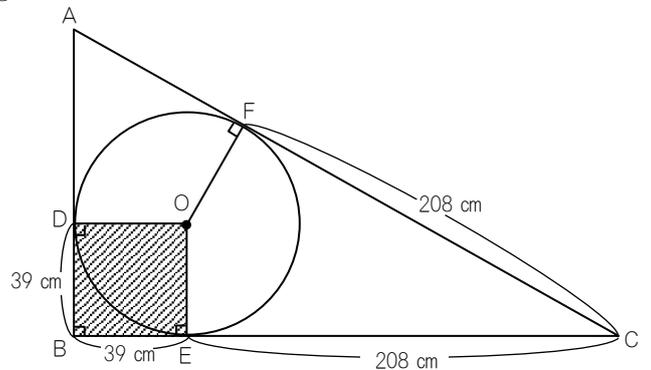
ア+イ=8, イ+ウ=11, ウ+ア=9という式を解いて, ア=3, イ=5, ウ=6となるので, ADの長さは3 cmです。

(2) 図②のように円の中心OとD, E, Fを結んで考えると, 四角形DBEOは1辺の長さが39 cmの正方形になります。EC=247-39=208 (cm) より, CFの長さも208 cm, AF=265-208=57 (cm) より, ADの長さも57 cmなので, AB=57+39=96 (cm) です。

図①



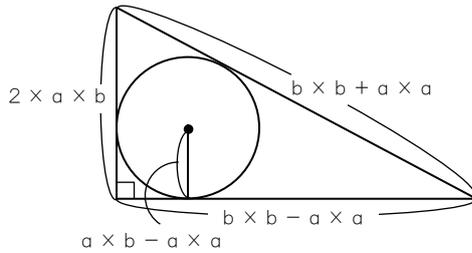
図②



(3) (2) の図②において、 $CA = AF + CF = AD + CE$ より、

$CA = AB - 39 + BC - 39 = AB + BC - 39 \times 2$ となっているので、円の半径 39 cm は、
 $(AB + BC - CA) \div 2$ によって求めることができます。ここで、図③で考えると、円の半径は、
 $\{2 \times a \times b + b \times b - a \times a - (b \times b + a \times a)\} \div 2$
 $= (2 \times a \times b - 2 \times a \times a) \div 2$
 $= a \times b - a \times a$
 となります。

図③



$a \times b - a \times a = a \times (b - a)$ であることから、

$$a \times (b - a) = \frac{3}{17} \times 2 \times a \times b \quad \text{の場合と、}$$

$$a \times (b - a) = \frac{3}{17} \times (b \times b - a \times a) \quad \text{の場合の一方を考えればよいことになります。}$$

$$a \times (b - a) = \frac{3}{17} \times 2 \times a \times b \quad \text{で考えると、}$$

$$b - a = \frac{6}{17} \times b \quad \text{より、} \quad a = \frac{11}{17} \times b, \quad a : b = 11 : 17 \quad \text{となります。このとき、}$$

$$(2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (b \times b + a \times a) = 187 : 84 : 205 \quad \text{となります。}$$

また、 $a \times (b - a) = \frac{3}{17} \times (b \times b - a \times a)$ で考えることも可能ですが、算数の範囲では式の処理が大変になります。この場合 $a : b = 3 : 14$ となりますが、ここから 3 辺の長さの比を求めると、 $84 : 187 : 205$ となって答えは同じになります。この検証を避けるために、設問は「1 つ答えなさい」としています。