受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

正五角形と黄金比

正五角形において，図１のかげをつけた部分の面積は，斜線部分の面積のＰ倍とします。このとき，図２の正五角形ＡＢＣＤＥについて，以下の問いに答えなさい。

図１

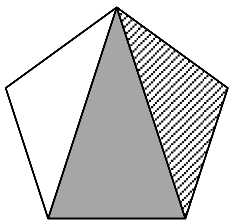
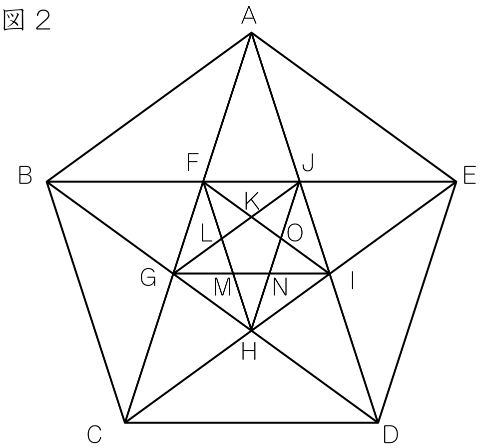


図２



（１）次の三角形の面積は，三角形ＣＤＩの面積の何倍ですか。

①　三角形ＡＣＤ

②　三角形ＧＨＩ

（２）

①　Ｐ×Ｐ＝Ｐ＋□が成り立つように，□に適切な数を入れなさい。

②　０.１，０.２，…，０.９，１.０，１.１，…のような，小数第１位までの小数を用いて，Ｐの範囲を，０.１＜Ｐ＜０.２　のような最も適切な形で答えなさい。

（３）正五角形ＡＢＣＤＥの面積は，正五角形ＫＬＭＮＯの面積の（△×Ｐ＋○）倍です。（△，◯）にあてはまる数を答えなさい。

最難関問題

（１）①（Ｐ＋１）倍，（Ｐ×Ｐ）倍，など

②$\frac{1}{P \times P \times P}$倍，$\frac{1}{P \times (P+1)}$倍，$\frac{1}{P \times P + P}$倍，$\frac{1}{P+P+1}$倍，$\frac{1}{P \times 2 + 1}$倍，など

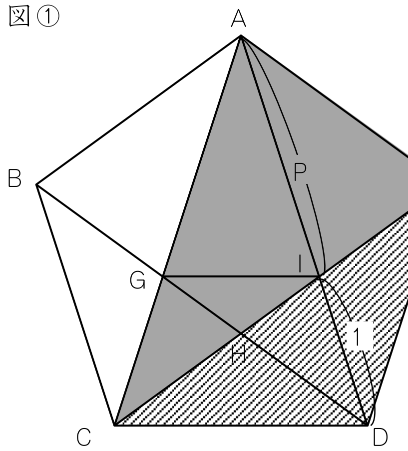
（２）①□＝１　②１.６＜Ｐ＜１.７

（３）（△，○）＝（２１，１３）

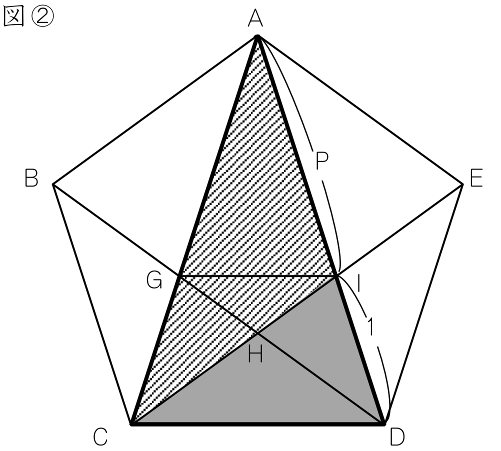
（１）

① 図①の三角形ＡＣＥとＣＤＥの面積の比はＰ：１なので，ＡＩ：ＩＤ＝Ｐ：１です。よって，図②の三角形ＣＤＩとＡＣＩの面積の比は１：Ｐであり，三角形ＣＤＩとＡＣＤの面積の比は１：（Ｐ＋１）となるので，（Ｐ＋１）倍です。

図①

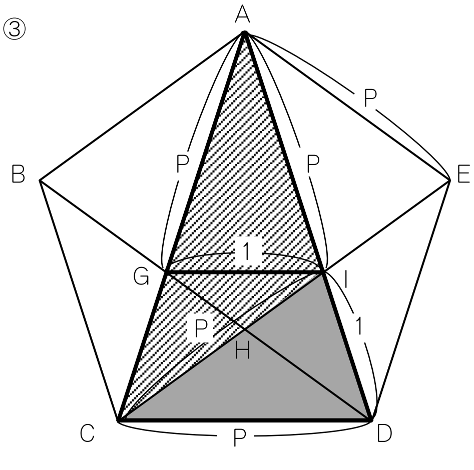


図②



また，いろいろな二等辺三角形に注目をすることで，図③の長さが成り立ちます。三角形ＣＤＩとＡＣＤは相似形で，相似比が１：Ｐなので，面積の比は
（１×１）：（Ｐ×Ｐ）となるので，
（Ｐ×Ｐ）倍も正解です。

図③



最難関問題

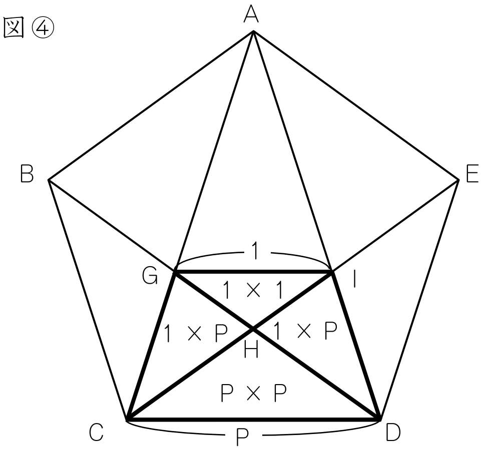
②　例えば，図④の台形ＧＣＤＩを対角線で４つの三角形に区切ると，面積比は図の通りになります。三角形ＣＤＩと三角形ＧＨＩの面積の比は，

（Ｐ×Ｐ＋１×Ｐ）:（１×１）＝（Ｐ×Ｐ＋Ｐ）: １なので，

$\frac{1}{P \times P + P}$倍です。他にも，$\frac{1}{P \times P \times P}$倍，$\frac{1}{P \times (P+1)}$倍，

$\frac{1}{P + P + 1}$倍，$\frac{1}{P \times 2 + 1}$倍なども正解です。

図④



（２）

①　（１）①で示したように，三角形ＡＣＤの面積は三角形ＣＤＩの面積の，（Ｐ×Ｐ）倍でも（Ｐ＋１）倍でもあるので，Ｐ×Ｐ＝Ｐ＋１が成り立ちます。よって，□＝１です。

②　Ｐ×Ｐ＝Ｐ＋１から考えます。

Ｐ＝１とすると，１×１＜１＋１，

Ｐ＝２とすると，２×２＞２＋１，より，１と２の間で考えます。

Ｐ＝1.５とすると，1.５×1.５＝2.２５＜1.５＋１＝2.５，

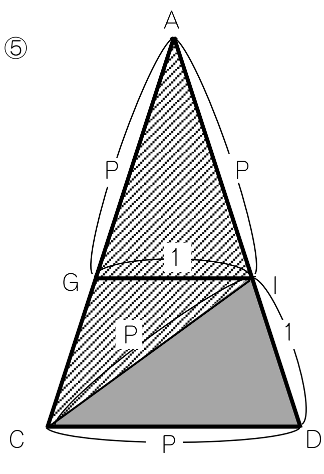
Ｐ＝1.６とすると，1.６×1.６＝2.５６＜1.６＋１＝2.６，

Ｐ＝1.７とすると，1.７×1.７＝2.８９＞1.７＋１＝2.７，となるので，1.６＜Ｐ＜1.７です。

Ｐを計算すると，1.６１８０３４…となります。Ｐについては，図⑤のように，

１：Ｐ＝Ｐ：（Ｐ＋１）となります。このとき，辺ＡＤに注目をすると，点ＩによってＡＩとＩＤに分けられ，ＩＤ：ＡＩ＝ＡＩ：ＡＤが成り立ちます。このように，線分を（短い方）:（長い方）＝（長い方）:（線分全体）となる点で分けることを，黄金分割といい，Ｐ：１を黄金比といいます。なお，一般的にはＰはギリシャ文字のファイ（ϕ，Φ）で表します。

図⑤



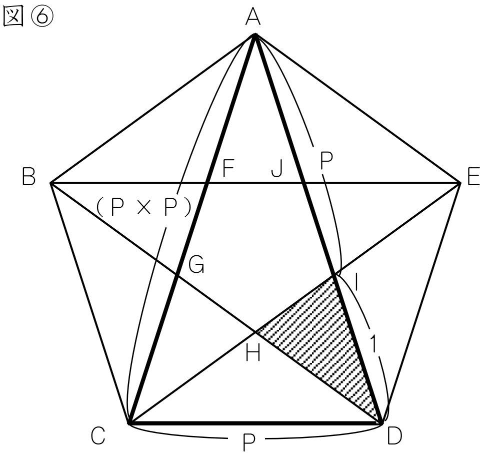
最難関問題

（３）図⑥の二等辺三角形ＡＣＤとＤＩＨは相似形です。三角形ＡＣＤの等辺と底辺の長さの比は，

（Ｐ＋１）：Ｐ＝（Ｐ×Ｐ）：Ｐ＝Ｐ：１です。三角形ＤＩＨの底辺ＩＨの長さは $1\times\frac{1}{P}=\frac{1}{P}$ となるので，

正五角形ＡＢＣＤＥとＦＧＨＩＪの相似比はＰ：$\frac{1}{P}$＝（Ｐ×Ｐ）：１です。正五角形ＦＧＨＩＪとＫＬＭＮＯの相似比も（Ｐ×Ｐ）：１なので，正五角形ＡＢＣＤＥとＫＬＭＮＯの相似比は（Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ）：１で，面積比は（Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ）：１です。

図⑥



Ｐ×Ｐ＝Ｐ＋１であることを利用すると，

Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ＝（Ｐ＋１）×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ

＝（Ｐ×Ｐ＋Ｐ）×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ＝（２×Ｐ＋１）×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ

＝（２×Ｐ×Ｐ＋Ｐ）×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ＝（３×Ｐ＋２）×Ｐ×Ｐ×Ｐ×Ｐ

＝（３×Ｐ×Ｐ＋２×Ｐ）×Ｐ×Ｐ×Ｐ＝（５×Ｐ＋３）×Ｐ×Ｐ×Ｐ

＝（５×Ｐ×Ｐ＋３×Ｐ）×Ｐ×Ｐ＝（８×Ｐ＋５）×Ｐ×Ｐ＝（８×Ｐ×Ｐ＋５×Ｐ）×Ｐ

＝（１３×Ｐ＋８）×Ｐ＝１３×Ｐ×Ｐ＋８×Ｐ＝２１×Ｐ＋１３

となります。

（フィボナッチ数が現れますが，黄金比とフィボナッチ数は密接なかかわりがあります。）