

フィボナッチ数列の n 番目・2

次のような数列を考えます。

A...1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

B...3, 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, ...

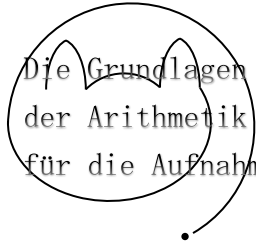
A, B の数列は、「前の2つの数の和が次の数になる」というきまりにしたがっています。このような数列は、1番目と2番目の数を決めれば残りの数はすべて確定するので、Aの数列を(1, 1), Bの数列を(3, 2)と表すことにします。以下の問いに答えなさい。ただし、数列の最初の2つの数は1以上の整数とします。

(1) (○, □) の数列の6番目の数を, ○, □を用いた式で表しなさい。

(2) 6番目の数が48となる数列をすべて (○, □) の形で答えなさい。

(3) 14番目の数を6で割ると余りが4となる (○, □) の組み合わせは何通りありますか。
ただし, ○と□には1以上9以下の整数が入るものとします。

(4) 14番目の数を5で割ると余りが2となる (○, □) の組み合わせは何通りありますか。
ただし, ○と□には1以上9以下の整数が入るものとします。



フィボナッチ数列の n 番目 $\cdot 2$

(1) $\bigcirc \times 3 + \square \times 5$ (2) $(1, 1), (3), (6, 6), (1, 9)$ (3) 18通り (4) 16通り

(1) 1番目から順に, $\bigcirc, \square, \bigcirc + \square, \bigcirc + \square \times 2, \bigcirc \times 2 + \square \times 3, \bigcirc \times 3 + \square \times 5$ となるので, $\bigcirc \times 3 + \square \times 5$ です。

(2) $\bigcirc \times 3 + \square \times 5 = 48$ をみたく組み合わせを求めて, $(\bigcirc, \square) = (1, 1), (3), (6, 6), (1, 9)$ です。

(3) (\bigcirc, \square) の数列を1番目から並べていくと,

$\bigcirc \times 1,$

$\square \times 1,$

$\bigcirc \times 1 + \square \times 1,$

$\bigcirc \times 1 + \square \times 2,$

$\bigcirc \times 2 + \square \times 3,$

$\bigcirc \times 3 + \square \times 5,$

$\bigcirc \times 5 + \square \times 8,$

$\bigcirc \times 8 + \square \times 13,$

$\bigcirc \times 13 + \square \times 21,$

$\bigcirc \times 21 + \square \times 34, \dots$ となります。

ここで $(1, 1)$ の数列を並べると,

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$

となり, ここに現れている数が, \bigcirc および \square にかけている数になっています。この点から,

$(1, 1)$ の数列が他の数列の基礎になっていることができます。

(\bigcirc, \square) の14番目は $\bigcirc \times 144 + \square \times 233$ です。これを6で割ると, $\bigcirc \times 144$ は割り切れま
す。また, $\square \times 233$ のうちで, $\square \times 228$ までは6で確実に割り切れます。よって,

$233 - 228 = 5$ より, $\square \times 5$ を6で割った余りを考えればよいことになります。 \square に, $\div 6$ の余り
として考えられる $0 \sim 5$ を順に入れていくと, $\square = 2$ のときに, $2 \times 5 \div 6 = 1$ 余り 4 となって条件を
満たします。よって, \square に入る数は, 6で割って2余る数, つまり, 2か8の2通りです。 \bigcirc には $1 \sim$
 9 のどれが入ってもよいので, (\bigcirc, \square) の組みあわせは, $9 \times 2 = 18$ (通り) です。

(4) $\bigcirc \times 144 + \square \times 233$ のうち、5で割ると、 $\bigcirc \times 140$ と $\square \times 230$ は割り切れるので、 $\bigcirc \times 4$ と $\square \times 3$ を5で割った余りを考えます。 \bigcirc と \square に $\div 5$ の余りとなりうる0~4をいれると、余りが2となるのは、次の場合です。

(0, 4) \rightarrow (5, 4), (5, 9) の2通り

(1, 1) \rightarrow (1, 1), (1, 6), (6, 1), (6, 6) の4通り

(2, 3) \rightarrow (2, 3), (2, 8), (7, 3), (7, 8) の4通り

(3, 0) \rightarrow (3, 5), (8, 5) の2通り

(4, 2) \rightarrow (4, 2), (4, 7), (9, 2), (9, 7) の4通り

よって、 $2 \times 2 + 4 \times 3 = 16$ (通り) です。