受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

フィボナッチ数列のｎ番目・２

次のような数列を考えます。
Ａ…１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４，…
Ｂ…３，２，５，７，１２，１９，３１，５０，８１，…

Ａ，Ｂの数列は，「前の２つの数の和が次の数になる」というきまりにしたがっています。このような数列は，１番目と２番目の数を決めれば残りの数はすべて確定するので，Ａの数列を（１，１），Ｂの数列を（３，２）と表すことにします。以下の問いに答えなさい。ただし，数列の最初の２つの数は１以上の整数とします。

（１）（○，□）の数列の６番目の数を，○，□を用いた式で表しなさい。

（２）６番目の数が４８となる数列をすべて（○，□）の形で答えなさい。

（３）１４番目の数を６で割ると余りが４となる（○，□）の組みあわせは何通りありますか。
ただし，○と□には１以上９以下の整数が入るものとします。

（４）１４番目の数を５で割ると余りが２となる（○，□）の組みあわせは何通りありますか。
ただし，○と□には１以上９以下の整数が入るものとします。

フィボナッチ数列のｎ番目・２

（１）○×３＋□×５　（２）（１１，３），（６，６），（１，９）　（３）１８通り　（４）１６通り

（１）１番目から順に，○，□，○＋□，○＋□×２，○×２＋□×３，○×３＋□×５となるので，
○×３＋□×５です。

（２）○×３＋□×５＝４８をみたす組み合わせを求めて，（○，□）＝（１１，３），（６，６），（１，９）
です。

（３）（○，□）の数列を１番目から並べていくと，

○×１，

□×１，

○×１　＋□×１，

○×１　＋□×２，

○×２　＋□×３，

○×３　＋□×５，

○×５　＋□×８，

○×８　＋□×１３，

○×１３＋□×２１，

○×２１＋□×３４，…となります。

ここで（１，１）の数列を並べると，

１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４，５５，８９，１４４，２３３，３７７，…

となり，ここに現れている数が，○および□にかけられている数になっています。この点から，
（１，１）の数列が他の数列の基礎になっているということができます。

（○，□）の１４番目は○×１４４＋□×２３３です。これを６で割ると，○×１４４は割り切れます。また，□×２３３のうちで，□×２２８までは６で確実に割り切れます。よって，２３３－２２８＝5より，□×５を６で割った余りを考えればよいことになります。□に，÷６の余りとして考えられる０～５を順に入れていくと，□＝２のときに，２×５÷６＝１余り４となって条件を満たします。よって，□に入る数は，６で割って２余る数，つまり，２か８の２通りです。○には１～９のどれが入ってもよいので，（○，□）の組みあわせは，９×２＝１８（通り）です。

（４）〇×１４４＋□×２３３のうち，５で割ると，〇×１４０と□×２３０は割り切れるので，
〇×４と□×３を５で割った余りを考えます。〇と□に÷５の余りとなりうる０～４をいれると，余りが２となるのは，次の場合です。

（０，４）→（５，４），（５，９）の２通り

（１，１）→（１，１），（１，６），（６，１），（６，６）の４通り

（２，３）→（２，３），（２，８），（７，３），（７，８）の４通り

（３，０）→（３，５），（８，５）の２通り

（４，２）→（４，２），（４，７），（９，２），（９，７）の４通り

よって，２×２＋４×３＝１６（通り）です。