受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

円の移動と膨張

一直線上の２点Ｏ，Ｓは最初７２cm離れていて，図１の矢印の向きに同時に出発します。点Ｏは毎秒３cmの速さで，点Ｓも一定の速さで進みます。また，点Ｏのまわりにはａを中心とする円があり，半径は最初０cmですが，出発すると同時に一定の割合で大きくなります。また，図２のようにこの円と直線が交わる２点のうち，Ｏの進行方向にある点をＰ，その反対側にある点をＱとします。点Ｓは点Ｐと重なってから３秒後に点Ｏと重なり，その９秒後に点Ｑと重なりました。

図１

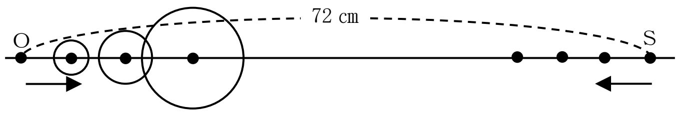
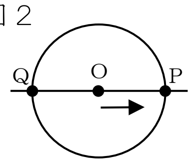


図２



（１）

① 次の比を簡単にしなさい。

$$\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right):\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

② 点Ｓの速さは毎秒何cmですか。また，円の半径は毎秒何cmの割合で大きくなりますか。

次に，点Ｓの速さのみ，いろいろと変えてみたところ，以下のようになりました。

○ 点Ｓの速さを毎秒 あ cmにすると，点Ｓが点Ｐと重なってから２８.８秒後に点Ｑと重なる

○ 点Ｓの速さを毎秒 い cmにすると，点Ｓが点Ｐと重なってから４.５秒後に点Ｑと重なる

○ 点Ｓの速さが毎秒 あ cmのときと毎秒 い cmのときでは，出発してから点Ｐと重なるまでの時間の比は８：５

（２） あ ， い にあてはまる数を答えなさい。

最難関問題

円の移動と膨張　（１）①５：９　②点Ｓ…毎秒５㎝，円…毎秒４㎝　（２）$\boxed{あ}$…３，$\boxed{い}$…９

（１）①

$$\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right):\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)=\frac{9-7}{7\times 9}:\frac{7-5}{5\times 7}=\frac{2}{63}:\frac{2}{35}=35:63=5:9$$ です。

（１）②

点Ｓの速さを毎秒□㎝とし，円の半径は毎秒△㎝の割合で大きくなるとします。
点Ｓが出発してから，点Ｐ，Ｏ，Ｑと重なるまでの時間の比は，

$\dfrac{72}{3+□+△}:\dfrac{72}{3+□}:\dfrac{72}{3+□-△}=\dfrac{1}{3+□+△}:\dfrac{1}{3+□}:\dfrac{1}{3+□-△}$ です。点Ｓが点Ｐと重なってから点Ｏと重なるまでの時間と，点Ｏと重なってから点Ｑと重なるまでの時間の比は，

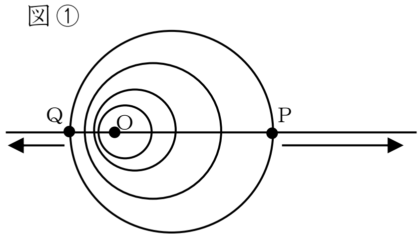
$\left(\dfrac{1}{3+□}-\dfrac{1}{3+□+△}\right):\left(\dfrac{1}{3+□-△}-\dfrac{1}{3+□}\right)$ です。ここで（１）①の比の計算を考えます。７と９，５と７の差が等しいので，$\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}\right):\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{2}{7\times 9}:\dfrac{2}{5\times 7}=5\times 7:7\times 9=5:9$ となっていることから，同様にして，$\left(\dfrac{1}{3+□}-\dfrac{1}{3+□+△}\right):\left(\dfrac{1}{3+□-△}-\dfrac{1}{3+□}\right)=(3+□-△):(3+□+△)$ です。よって，（３＋□－△）：（３＋□＋△）＝３：９＝１：３という速さの比が求まります。（３＋□＋△）は点ＳとＰが向い合って進む速さに，（３＋□－△）は点ＳとＱが向い合って進む速さにあたります。また，点ＳとＯが向い合って進む速さは（３＋□）ですから，比の$\dfrac{1+3}{2}=2$にあたります。よって，

（点ＳとＰが向い合って進む速さ）：（点ＳとＯが向い合って進む速さ）：（点ＳとＱが向い合って進む速さ）＝３：２：１，

（点ＳとＰが重なるまでの時間）：（点ＳとＯが重なるまでの時間）：（点ＳとＱが重なるまでの時間）$=\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{1}=2:3:6$ です。時間の比の差の３－２＝１が３秒にあたるので，点ＳとＰが重なるまでの時間は３×２＝６（秒），点ＳとＯが重なるまでの時間は３×３＝９（秒），点ＳとＰが重なるまでの時間は３×６＝１８（秒）です。

７２÷９＝８，８－５＝３より，点Ｓの速さは毎秒５㎝で，７２÷６＝１２，１２－８＝４より円の半径は毎秒４㎝の割合で大きくなります。円の半径の大きくなる速さの方が中心Ｏの速さよりも速いので，図①のように，点Ｐは３＋４＝７より毎秒７㎝の速さで右に進み，点Ｑは４－３＝１より毎秒１㎝の速さで左に進みます。

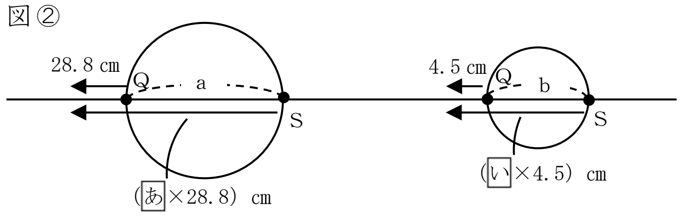
図①



（２）

はじめに，点Ｓの速さが毎秒$\boxed{\text{あ}}$㎝のとき，点ＳとＱの速さの差は毎秒（$\boxed{\text{あ}}$－１）㎝ですが，（$\boxed{\text{あ}}$－１）：（$\boxed{\text{い}}$－１）＝４.５：２８.８＝５：３２ではありません。というのも，ＳがＰに重なってからＱに重なるまでに進む距離が等しくないからです。ここで，それぞれの場合にＳが点Ｐと重なってから点Ｑと重なるまでの様子を表すと，図②のようになります。

図②



点Ｑは毎秒１㎝の速さで左に進むので，それぞれ１×２８.８＝２８.８（㎝），１×４.５＝４.５（㎝）左に進みます。また，円の直径は一定の割合で大きくなるので，点ＳがＰと重なったときの円の直径の長さの比ａ：ｂは，点ＳがＰと重なるまでにかかる時間の比に等しく，８：５です。

（$\boxed{\text{あ}}$×２８.８－２８.８）：（$\boxed{\text{い}}$×４.５－４.５）＝８：５より，

（$\boxed{\text{あ}}$－１）×２８.８：（$\boxed{\text{い}}$－１）×４.５＝８：５，

（$\boxed{\text{あ}}$－１）×１４４＝（$\boxed{\text{い}}$－１）×３６，

（$\boxed{\text{あ}}$－１）：（$\boxed{\text{い}}$－１）＝３６：１４４＝１：４です。

ここで，（$\boxed{\text{あ}}$－１）を①とすると，（$\boxed{\text{い}}$－１）は④，$\boxed{\text{あ}}$は（①＋１），$\boxed{\text{い}}$は（④＋１）となるので，点ＳとＰが向い合って進む速さ（①＋８）と（④＋８）の比は，時間の比の逆比で５：８です。

（①＋８）：（④＋８）＝５：８より，⑳＋４０＝⑧＋６４，⑫＝２４，①＝２となるので，

$\boxed{\text{あ}}$＝２＋１＝３，$\boxed{\text{い}}$＝２×４＋１＝９です。