受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

トリボナッチ数列のｎ番目

次のような数列を考えます。

Ａ…０，１，０，１，２，３，６，１１，２０，３７，…

Ｂ…１，２，２，５，９，１６，３０，５５，１０１，１８６，…

Ａ，Ｂの数列は，「前の３つの数の和が次の数になる」というきまりにしたがっています。このような数列は，１～３番目の数を決めれば残りの数はすべて確定するので，Ａの数列を（０，１，０），Ｂの数列を（１，２，２）と表すことにします。以下の問いに答えなさい。

（１）（○，□，△）の数列の６番目の数を，○，□，△を用いた式で表しなさい。

（２）６番目の数が７２となる数列をすべて，（○，□，△）の形で答えなさい。

（３）（○，□，△）の数列の１２番目の数を，○，□，△を用いた式で表しなさい。

（４）（○，□，△）の数列のｎ番目の数を，○，□，△を用いた式で表すと，次のようになりました。

○×４１０７４４＋□×６３４０６１＋△×７５５４７６

このとき，（○，□，△）の数列の（ｎ＋１）番目の数を，○，□，△を用いた式で表しなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

トリボナッチ数列のｎ番目

（１）○×２＋□×３＋△×４

（２）（６，０，０），（４，０，１），（３，２，０），（２，０，２），（１，２，１），
　　（０，４，０），（０，０，３）

（３）○×８１＋□×１２５＋△×１４９

（４）○×７５５４７６＋□×１１６６２２０＋△×１３８９５３７

（１）１番目から順に，○，□，△，○＋□＋△，○＋□×２＋△×２，○×２＋□×３＋△×４，
　となるので，○×２＋□×３＋△×４です。

（２）○×２＋□×３＋△×４＝１２をみたす組み合わせを求めて，
　（○，□，△）＝（６，０，０），（４，０，１），（３，２，０），（２，０，２），（１，２，１），
　　　　　　　　（０，４，０），（０，０，３）
　です。

（３）○×２＋□×３＋△×４の２，３，４のように，○，□，△にかけ算する数を１番目から順に追ってみます。最初の３つは，○，□，△なので，
　○×１＋□×０＋△×０，○×０＋□×１＋△×０，○×０＋□×０＋△×１ですから，次の表になります。

○×	1	0	0
□×	0	1	0
△×	0	0	1

　４～６番目は，○×１＋□×１＋△×１，○×１＋□×２＋△×２，○×２＋□×３＋△×４なので，次のようになります。

○×	1	0	0	1	1	2
□×	0	1	0	1	2	3
△×	0	0	1	1	2	4

　考えてみれば当たり前のことですが，○，□，△にかけ算する数自体が，前の３つの数の和として求めることができます。○にかけ算する数の数列は，（１，０，０），□では（０，１，０），
△では（０，０，１）と表せます。

このことを利用して１２番目までを表にまとめると，次のようになります。

○×	1	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81
□×	0	1	0	1	2	3	6	11	20	37	68	125
△×	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149

よって，○×８１＋□×１２５＋△×１４９です。

（４）○，□，△にかけ算をする数の間の関係を考えます。○と△については，１つずれて０，０，１の並びが現れているので，以降も１つずれて同じ数列になっています。

○×	1	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81
△×	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149

○と□については，かけ算をする数の差に注目をします。

○×	1	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81
□×	0	1	0	1	2	3	6	11	20	37	68	125
差			0	0	1	1	2	4	7	13	24	44

○と□の差の数列も，０，０，１の並びが１つずれて現れています。よって，□にかけ算をする数は，次のように○にかけ算をする数を２つ加えることで求めることができます。

○×	1	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81
□×	0	1	0	1	2	3	6	11	20	37	68	125
差			0	0	1	1	2	4	7	13	24	44

さらに，○と△の列が１つずれていることと合わせれば，○と△にかけ算をする数を加えると，１つ後の□にかけ算をする数を求めることができます。

○×	1	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81
□×	0	1	0	1	2	3	6	11	20	37	68	125
△×	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149

最難関問題

　ここで改めて△について考えると，たとえば下の２＋４＋７＝１３は，２＋４＝６が□にかけ算をする数で，６＋７＝１３と求められるので，□と△にかけ算をする数を加えると，１つ後の△にかけ算をする数を求めることができます。

○×	１	０	０	１	１	２	４	７	１３	２４	４４	８１
□×	０	１	０	１	２	３	６	１１	２０	３７	６８	１２５
△×	０	０	１	１	２	４	７	１３	２４	４４	８１	１４９

　以上より，○×４１０７４４＋□×６３４０６１＋△×７５５４７６の次の数は，
○にかける数は７５５４７６，
□にかける数は４１０７４４＋７５５４７６＝１１６６２２０，
○にかける数は６３４０６１＋７５５４７６＝１３８９５３７，となって，
○×７５５４７６＋□×１１６６２２０＋△×１３８９５３７です。