

# 最難関問題

3 辺が整数比の直角三角形・6

次の問いに答えなさい。

図 1

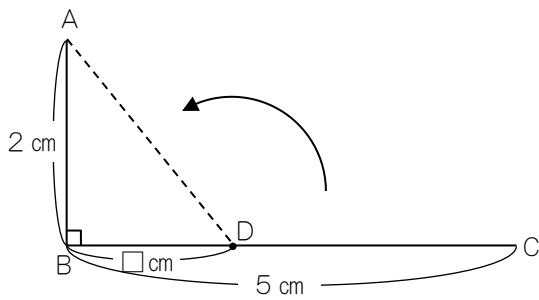
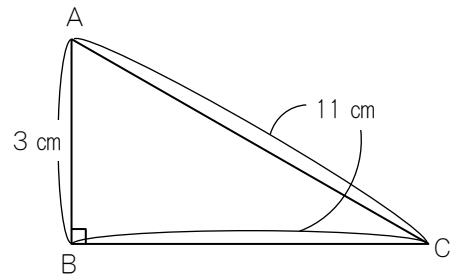


図 2



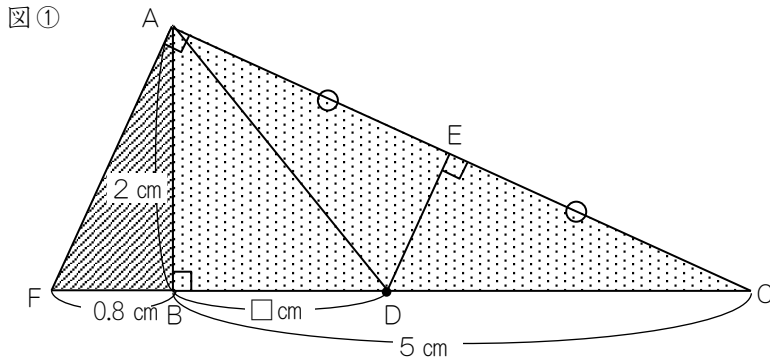
- (1) 図 1 のように、2 cm の線分  $AB$  と 5 cm の線分  $BC$  が垂直に交わっています。点  $D$  において線分  $BC$  を折ったところ、点  $C$  が点  $A$  に重なりました。このとき、図 1 の□の長さを求めなさい。
- (2) 図 2 の直角三角形  $ABC$  の、辺  $AB$  の長さは 3 cm で、辺  $BC$  と  $CA$  の長さの和は 11 cm です。このとき、長さの比  $AB : BC : CA$  を求めなさい。

最難関問題

3 辺が整数比の直角三角形・6 (1) 2.1 cm (2) 33 : 56 : 65

(1) 図①のように補助線を引いていきます。三角形 ACD は  $AD = CD$  の二等辺三角形なので、頂点 D から辺 AC に垂直な線 DE を引くと  $AE = CE$  となります。次に、頂点 A から DE と平行な線を引き、辺 CB の延長線と交わる点を F とします。三角形 ABC と FBA は相似形なので、

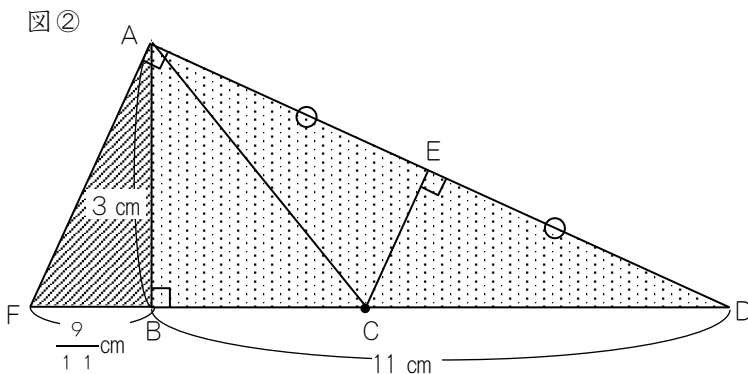
$FB = 2 \times \frac{2}{5} = 0.8$  (cm) です。  $FC = 0.8 + 5 = 5.8$  (cm),  $DC = 5.8 \div 2 = 2.9$  (cm) なので、  
 $\square = 5 - 2.9 = 2.1$  (cm) です。



(2) (1) とまったく同じ手順で考えます。図②のように  $BD = 11$  cm となる延長線 BD を引くと、

$FB = 3 \times \frac{3}{11} = \frac{9}{11}$  (cm),  $FD = \frac{9}{11} + 11 = \frac{130}{11}$  (cm),  $CA = CD = \frac{130}{11} \div 2 = \frac{65}{11}$  (cm)

なので、  $BC = 11 - \frac{65}{11} = \frac{56}{11}$  (cm) です。よって、  $3 : \frac{56}{11} : \frac{65}{11} = 33 : 56 : 65$  です。



最難関問題

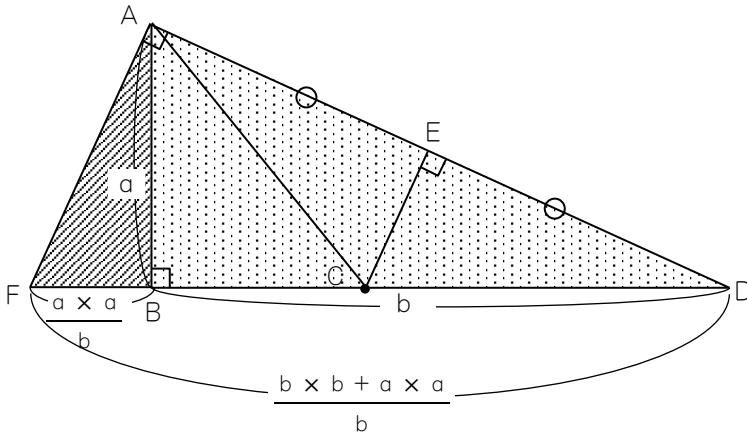
(1)(2)を一般化すると、次のようになります。直角三角形ABCの辺ABの長さをa、BCとCAの長さの和をbとすると、図③のように長さbの延長線BDを引くことで、

$$FB = a \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a}{b}, \quad FD = \frac{a \times a}{b} + b = \frac{b \times b + a \times a}{b}, \quad CA = CD = \frac{b \times b + a \times a}{2 \times b} \text{なので、}$$

$$BC = b - \frac{b \times b + a \times a}{2 \times b} = \frac{b \times b - a \times a}{2 \times b} \text{です。}$$

よって、 $a : \frac{b \times b - a \times a}{2 \times b} : \frac{b \times b + a \times a}{2 \times b} = (2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (b \times b + a \times a)$ です。

図③



以上から示されるのは、次の3点です。

- ① 2つの整数  $a < b$  について、 $(2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (b \times b + a \times a)$  はピタゴラス比になる。
- ② 角Bが直角である直角三角形ABCについて、 $AB : (BC + CA) = a : b$  が整数の比のとき、 $AB : BC : CA = (2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (b \times b + a \times a)$  となる。
- ③ ピタゴラス三角形の3辺の比は、ある整数  $a < b$  について、 $(2 \times a \times b) : (b \times b - a \times a) : (b \times b + a \times a)$  の形で表すことができる

③は②から導けます。3辺の比  $AB : BC : CA$  が決まれば、当然  $AB : (BC + CA)$  はきまるためです。