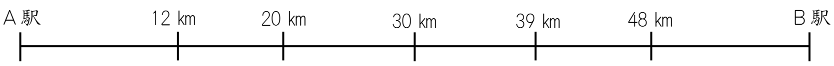
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

## 単線とすれ違い地点

２台の列車ＰとＱが，６０km離れたＡ駅とＢ駅の間を往復し続けます。ＰとＱは試験車両のため，どちらの駅に到着しても，停車することなく折り返します。また，２つの駅の間に他の駅はありません。線路は１本しかない（これを単線といいます）ため，線路の上で列車がすれ違うことはできませんが，Ａ，Ｂ両駅と，その間にある５つの地点のすぐ近くでは線路が２本に分かれていて，列車がすれ違うことができます。５つの地点の，Ａ駅からの距離は下の図のようになっています。




列車Ｐは時速３０km，Ｑは時速４５kmの速さで進み，つぎのきまりにしたがってすれ違います。

○ＰとＱが同時にすれ違い可能な地点につく場合は，減速（げんそく）することなくそのまますれ違います。

○それ以外の場合は，一方がすれ違い可能な地点で停車して，他方がその地点を通過すると同時に出発することですれ違いを行います。また，すれ違いがより早く起こるように停車する列車はきまります。例えば，列車ＰがＢ駅に向かって，ＱがＡ駅に向かって進んでいて，そのままだとＡ駅から２５kmの地点で出会う場合，ＰがＡ駅から２０kmの地点にあるすれ違い可能な地点で停車してＱとすれ違うのを待ちます。
　ただし，どちらが停車をしてもすれ違いが起こる時刻が等しくなる場合は，列車Ｐが停車します。

次の問いに答えなさい。列車の長さや，折り返し・加速・減速にかかる時間は考えません。

（１）Ａ駅から列車ＰとＱが同時に出発しました。２台の列車が同時にＡ駅に戻ってくるのは，何時間何分後ですか。

（２）列車ＱがＡ駅を出発してから再びＡ駅に戻ってくるまでに列車ＰもＡ駅を出発したところ，２台の列車は何回かすれ違ってからＡ駅に同時に戻ってきました。すれ違うときには，すべて列車Ｑが停車しました。ＰはＱより何分遅れて出発しましたか。考えられる範囲をすべて答えなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

単線とすれ違い地点

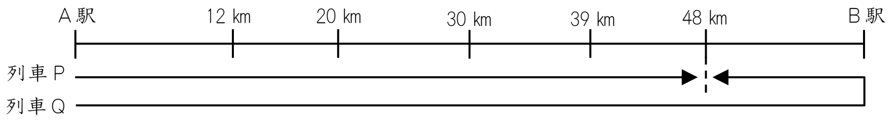
（１）８時間２０分後　（２）３０分をこえて４２分未満，$９３\dfrac{1}{3}$分をこえて１０４分未満

（１）列車ＰとＱの速さの比は３０：４５＝２：３なので，すれ違いのきまりを考えない場合，

Ｐが$６０×２×\dfrac{2}{2+3}$＝４８（km），Ｑが６０×２－９６＝７２（km）進んだところで２台の列車は出会います。このことから，Ｐを毎回４８km進めて，実際にどのようにすれ違いが起こるのかを考えていきます。

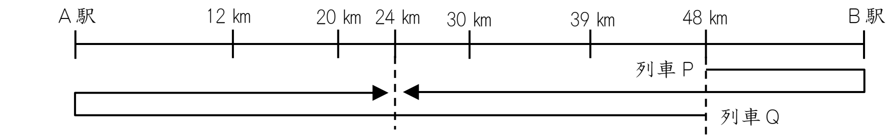
１回目のすれ違い

下の図のように，２台の列車は同時にすれ違い地点に到着するため，減速することなくそのまますれ違います。

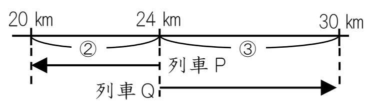



２回目のすれ違い

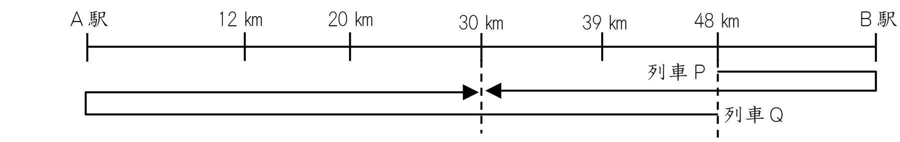
１回目のすれ違い地点からＰが４８km，Ｑが７２km進むと，下の図のようになります。




このとき，Ａ駅から２４kmの地点の両側にあるすれ違い地点について考えると，下の図のように，すれ違い地点までにＰとＱが進む距離の比は，（２４－２０）:（３０－２４）＝２：３です。




よって，ＰとＱがもしも２４km地点でそのまますれ違うことができたら，それぞれが同時にすれ違い地点に到着することになります。このため，ＰとＱ，どちらがすれ違い地点で待っても，すれ違いが起こる時刻は等しくなるので，列車Ｐが３０km地点で停車します。

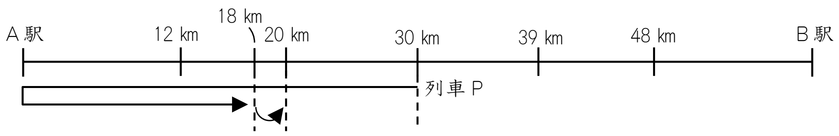



このとき，列車Ｐは４２km，Ｑは７８km進むので，Ｐが停車している時間は，

７８÷４５×６０－４２÷３０×６０＝２０（分）です。

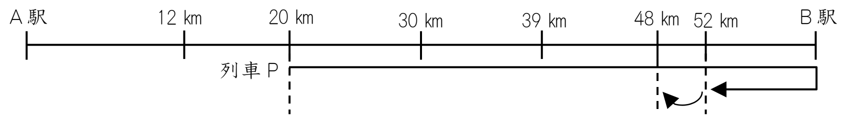
３回目のすれ違い

以降は列車Ｐの動きのみに注目します。２回目のすれ違い地点からＰが４８km進むと，Ａ駅から１８kmの地点まで進みます。両側にあるすれ違い地点はＡ駅から１２kmと２０kmの地点なので，すれ違い地点までにＰとＱが進む距離の比は，（２０－１８）:（１８－１２）＝１：３です。２回目のすれ違いの場合にみたように，すれ違い地点までに進む距離の比が２：３のときにＰとＱがすれ違い地点に進むのは同時になるので，１：３の場合はＰの方が早くすれ違い地点に進みます。よって，Ｑがすれ違い地点で待つことになるので，Ｐは下の図のように動きます。



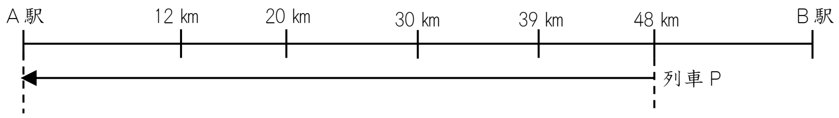

４回目のすれ違い

３回目のすれ違い地点からＰが４８km進むと，Ａ駅から５２kmの地点まで進みます。両側にあるすれ違い地点はＡ駅から４８kmの地点とＢ駅なので，すれ違い地点までにＰとＱが進む距離の比は，
（５２－４８）:（６０－５２）＝１：２です。よって，Ｑがすれ違い地点で待つことになるので，Ｐは下の図のように動きます。



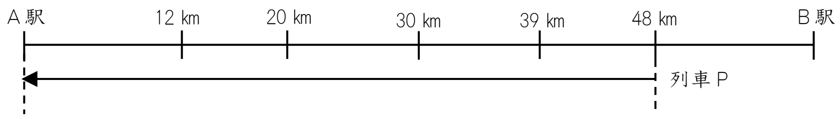

Ａ駅に同時に到着

４回目のすれ違い地点からＰが４８km進むと，ちょうどＡ駅に着くので，ＰとＱは同時にＡ駅に到着します。

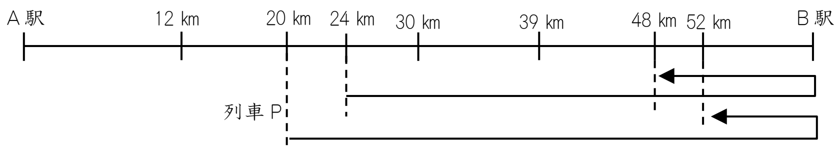



ここまでの列車Ｐの動きを振り返ると，２０分間停車していたときを除くと，時速３０kmで進み続けています。ＰはＡＢ間を２往復しているので，進んでいた時間が６０×４÷３０＝８（時間）ですから，
２０分＋８時間＝８時間２０分です。

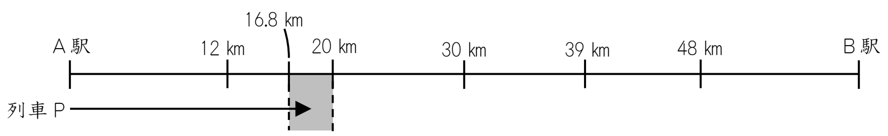
（２）Ｑがすれ違いのたびに停車していたということは，Ｐはすれ違ってから次にすれ違うまでに，毎回４８㎞より多く進んでいるということです。ただし，最後にはＰとＱがＡ駅に同時に戻ってくるので，Ｐはちょうど４８㎞進みます。よって，最後にすれ違ったのは，Ａ駅から４８㎞の地点です。




Ａ駅から４８㎞の地点から４８㎞戻ると，下の図のように２４㎞の地点につきます。それよりも前にある，２０㎞の地点から出発した場合を考えると，列車Ｐは５２㎞の地点まで進むので，（１）でみたように，Ｑがすれ違い地点で待ちます。他方で，１２㎞の地点から出発するとちょうどＢ駅に着くので，条件にあいません。




このことから，ＰとＱの１回目のすれ違いが，Ａ駅から２０㎞の地点でＱが停車することで起こる場合が答えの一つとなります。（２０－１２）×$\frac{2}{5}$＝３.２，２０－３.２＝１６.８より，すれ違い地点で停車しない場合にＰはＱと，Ａ駅から１６.８㎞をこえて２０㎞未満の範囲で出会うことになります。




１６.８㎞の地点に進むのに，Ｑは（６０×２－１６.８）÷４５×６０＝１３７.６（分），
Ｐは１６.８÷３０×６０＝３３.６（分）かかるので，ＰはＱより１３７.６－３３.６＝１０４（分）遅れて出発します。

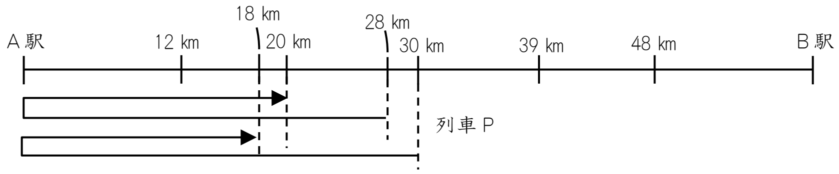
２０㎞の地点に進むのに，Ｑは（６０×２－２０）÷４５×６０＝１３３$\frac{1}{3}$（分），

Ｐは２０÷３０×６０＝４０（分）かかるので，ＰはＱより１３３$\frac{1}{3}$－４０＝９３$\frac{1}{3}$（分）遅れて出発します。

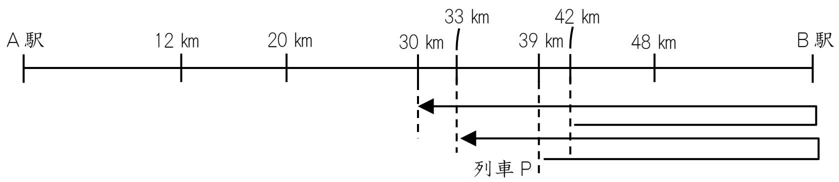
よって，９３$\frac{1}{3}$分をこえて１０４分未満です。

最難関問題

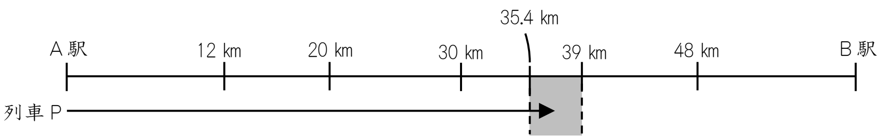
Ａ駅から２０kmの地点から４８km戻ると，下の図のように２８kmの地点につきます。それよりも前にある，３０kmの地点から出発した場合を考えると，列車Ｐは１８kmの地点まで進むので，
（２０－１８）:（１８－１２）＝１：３より，Ｑがすれ違い地点で待ちます。他方で，３９kmの地点から出発するとＡ駅から１１kmの地点で出会うので，条件にあいません。




Ａ駅から３０kmの地点から４８km戻ると，下の図のように４２kmの地点につきます。それよりも前にある，３９kmの地点から出発した場合を考えると，列車Ｐは３３kmの地点まで進むので，
（３３－３０）:（３９－３３）＝１：２より，Ｑがすれ違い地点で待ちます。他方で，３０kmの地点から出発するとＡ駅から４２kmの地点で出会うので，条件にあいません。




こうして，ＰとＱの１回目のすれ違いが，Ａ駅から３９kmの地点でＱが停車することで起こる場合も答えとなります。（３９－３０）×$\frac{2}{5}$＝３.６，３９－３.６＝３５.４より，すれ違い地点で停車しない場合にＰはＱと，Ａ駅から３５.４kmをこえて３９km未満の範囲で出会うことになります。



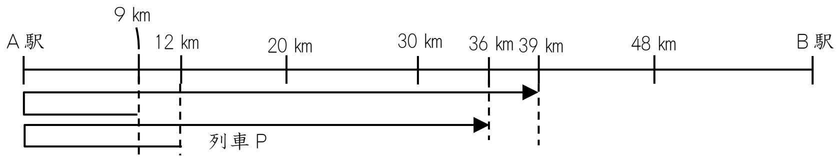

３５.４kmの地点に進むのに，Ｑは（６０×２－３５.４）÷４５×６０＝１１２.８（分），
Ｐは３５.４÷３０×６０＝７０.８（分）かかるので，ＰはＱより１１２.８－７０.８＝４２（分）遅れて出発します。

３９kmの地点に進むのに，Ｑは（６０×２－３９）÷４５×６０＝１０８（分），
Ｐは３９÷３０×６０＝７８（分）かかるので，ＰはＱより１０８－７８＝３０（分）遅れて出発します。

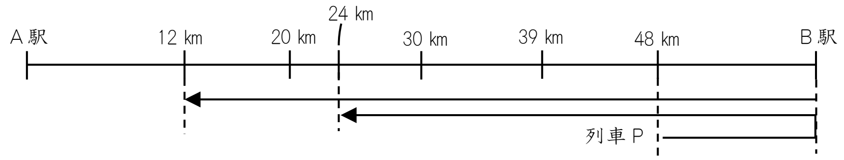
よって，３０分をこえて４２分未満です。

最難関問題

　Ａ駅から３９kmの地点から４８km戻ると，下の図のように９kmの地点につきます。それよりも前にある，１２kmの地点から出発した場合を考えると，列車Ｐは３６kmの地点まで進むので，
（３９－３６）:（３６－３０）＝１：２より，Ｑがすれ違い地点で待ちます。他方で，２０kmの地点から出発するとＡ駅から２８kmの地点でぶつかるので，条件にあいません。




　Ａ駅から１２kmの地点から４８km戻ると，下の図のようにちょうどＢ駅につきます。列車ＰとＱがＢ駅から出発して１２kmの地点ですれ違ったとすると，Ｑが停車せずに同時にすれ違ったことになってしまいます。それよりも前にある，４８kmの地点から出発した場合を考えると，列車Ｐは２４kmの地点まで進むので，条件にあいません。




　よって，これ以前の場合は考えることができませんから，

３０分をこえて４２分未満，９３$\frac{1}{3}$分をこえて１０４分未満が答えとなります。