

2020の問題・和と積の分解

2020年1月1日より12月31までのそれぞれの日について、年・月・日の各位に現れる1けたの数について次のような計算をします。

- ① まず、同じ数どうしを掛け合わせます。
- ② つぎに、それらをたし算します。

例えば、2020年3月25日は $0 \times 0 = 0$ 、 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 、3、5をたし算して、 $0 + 8 + 3 + 5 = 16$ となります。

(1) 計算をすると8となる日は全部で何日ありますか。

(2) 計算をすると21となる日は全部で何日ありますか。

2020の問題・和と積の分解 (1) 14日 (2) 14日

(1) 2が月か日のいずれかに現れると、例えば2020年2月□日において、 $2 \times 2 \times 2 = 8$ となるので、□は0になってしまいます。よって、2は月にも日にも現れません。

2が月にも日にも現れない場合、 $8 - 2 \times 2 = 4$ より、月と日に現れる数について計算をすると4になります。4を2つ以上の数に和分解すると、 $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ となります。2 + 2, 2 + 1 + 1は、2が月にも日にも現れないという条件に反します。また、2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1のように複数の1が現れる場合は、1どうしがかけあわされて $1 \times 1 = 1$, $1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$ となってしまうので、不可能です。

よって、 $4 = 3 + 1$ の(3, 1)を並べかえます。並べかえにおいて、1や0を新たに加えても答えは変わらない点に注意をすると、次のようになります。

1月3日, 1月13日, 1月30日, 1月31日,
3月1日, 3月10日, 3月11日,
10月3日, 10月13日, 10月30日, 10月31日,
11月3日, 11月13日, 11月30日

よって、14日です。

(2) (1) にならって、2が月や日に現れるかどうかで場合分けをします。

2が月・日に現れない場合

$21 - 2 \times 2 = 17$ となります。

○月や日に4が2回現れる場合

$4 \times 4 = 16$, $17 - 16 = 1$ より、(4, 4, 1)を並べかえると、4月14日のみがあてはまります。

○月や日に3が2回現れる場合

$3 \times 3 = 9$, $17 - 9 = 8$ となります。(3, 3, 8)を並べかえてできる日付はありません。また、8を2つに和分解しても同様です。

○その他の場合

17をいくつかの1以上の異なる1けたの数に和分解します。4つに和分解する場合、月は12月までしかないので、 $1 + 2 + \square + \triangle$ から、12月□△日となります。これは、2が月と日には表れないという条件に反します。よって、17を2つか3つに和分解します。

$17 = 9 + 8$ の場合、8月9日と9月8日です。

$17 = 9 + 7 + 1$ の場合、7月19日と9月17日です。

$17 = 9 + 5 + 3$, $8 + 6 + 3$, $8 + 5 + 4$, $7 + 6 + 4$ の場合、並べかえてできる日付がありません。

よって、2が月・日に現れない場合、条件にあう日付は5日あります。

2が月・日に1回現れる場合

$21 - 2 \times 2 \times 2 = 13$ となります。

○月や日に3が2回現れる場合

$3 \times 3 = 9$ 、 $13 - 9 = 4$ ですが、(2, 3, 3, 4)を並べかえてできる日付けはありません。

○そのほかの場合

13を、2を除く1以上の異なる1けたの数3つ以下に分解し、それに2を1つ加えた日付を考えます。

$13 = 9 + 4$ の場合、(2, 9, 4)を並べかえて、4月29日と9月24日です。

$13 = 8 + 5$ の場合、(2, 8, 5)を並べかえて、5月28日と8月25日です。

$13 = 8 + 4 + 1$ の場合、(2, 8, 4, 1)を並べかえてできる日付はありません。13を3つに和分解する場合、 $13 = \bigcirc + \triangle + 1$ として、(2, \bigcirc , \triangle , 1)を並べかえて12月 \bigcirc \triangle 日とすることになりますが、 $\bigcirc + \triangle$ は最大でも29日の $2 + 9 = 11$ なので、不可能です。

$13 = 7 + 6$ の場合、(2, 7, 6)を並べかえて、6月27日と7月26日です。

よって、2月が月・日に1回現れる場合、条件にあう日付は6日あります。

2が月・日に2回現れる場合

$21 - 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 5$ となります。

4を、2を除く1以上の異なる1けたの数2つ以下に分解し、それに2を2つ加えた日付を考えます。

5のままの場合、(2, 2, 5)を並べかえて、2月25日と5月22日です。

$5 = 4 + 1$ の場合、(2, 2, 4, 1)を並べかえて、12月24日です。

よって、2月が月・日に2回現れる場合、条件にあう日付は3日あります。

以上より、 $5 + 6 + 3 = 14$ (日) です。