受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

アルキメデスの立体・切頂八面体

図１のように１辺の長さが３㎝の正八面体を各辺を３等分する点を通る平面で切断し，図２の立体Ｘを作りました。次の問いに答えなさい。なお，１辺の長さが１㎝の正三角形の面積は０.４３㎠とします。

図１

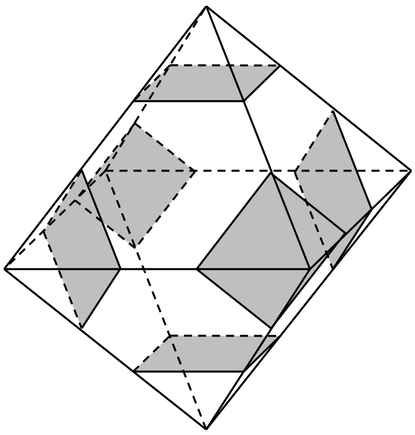
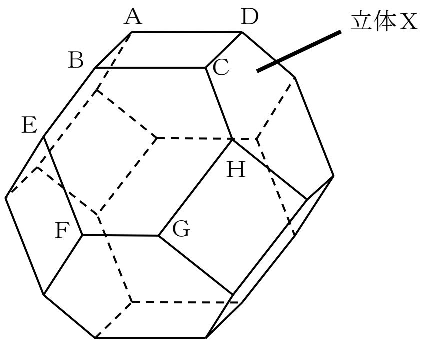


図２



（１）立体Ｘを，頂点Ｆを通って面ＡＢＣＤと平行な平面で切断しました。切り口の面積を求めなさい。

（２）立体Ｘを，頂点Ｄを通って面ＢＥＦＧＨＣと平行な平面で切断しました。切り口の面積を求めなさい。

（３）立体Ｘを，辺ＣＤ上の点Ｐを通って面ＢＥＦＧＨＣと平行な平面で切断したところ，切り口の面積は３.１１３２㎠になりました。長さの比ＣＰ：ＰＤを求めなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

アルキメデスの立体・切頂八面体（１）７㎠　（２）５.５９㎠　（３）１：４

立体Ｘは正方形６個と正六角形８個からなるすべての辺の長さが等しい１４面体で，正八面体の頂点を切り落として作ることができるために切頂八面体といいます。すべての面が合同である正四面体や立方体，正八面体といった正多面体に対し，面の形が２種類以上あるこのような多面体をアルキメデスの立体といいます。

（１）頂点Ｆを通り面ＡＢＣＤと平行な切断面は，図１のようになり，点Ｆ，Ｇが正八面体の３㎝の辺を３等分することから，図２のように１辺３㎝の正方形において直角をはさむ２辺の長さが１㎝の直角二等辺三角形を４個切り落とした八角形になります。

よってその面積は，$3 \times 3 - 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 4 = 7$（$\text{cm}^2$）です。

図１

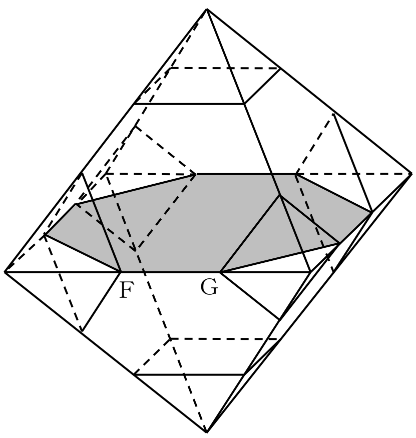
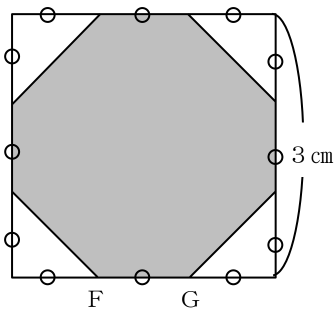


図２



○は１㎝を表します

最難関問題

（２）頂点Ｄを通る面ＢＥＦＧＨＣと平行な切断面は，図３のように各辺が正六角形ＢＥＦＧＨＣと平行な六角形になります。ＡＤの長さは１㎝です。また，ＤＩの長さは図４の斜線部分の三角形の相似により，３×$\frac{2}{3}$＝２（㎝）です。よって，切断面の六角形は図５のように１辺の長さが４㎝の正三角形から，１辺の長さが１㎝の正三角形を３個切り落とした形であることがわかります。六角形の面積は１辺の長さが１㎝の正三角形の，４×４－１×３＝１３（倍）ですから，０.４３×１３＝５.５９（㎝^{2}）です。

図３

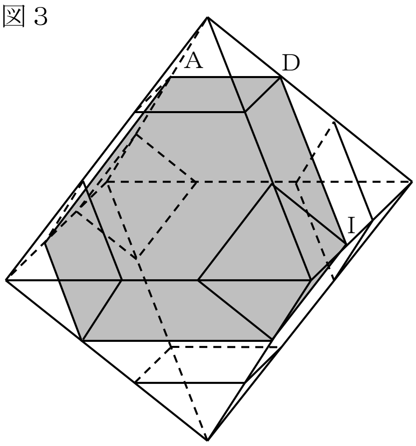


図４

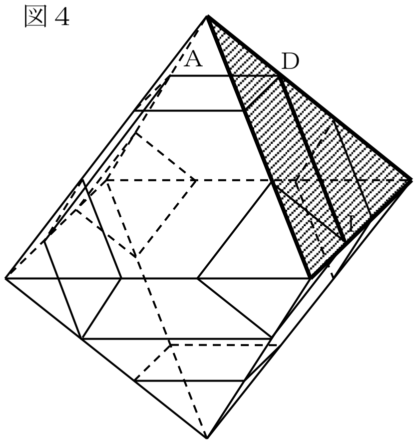
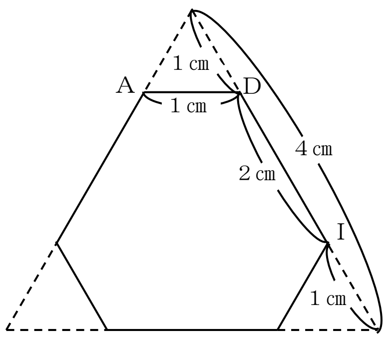


図５



最難関問題

（３）点Ｐを通る面ＢＥＦＧＨＣと平行な切断面は，（２）の図３で表した点Ｄを通る切断面とも平行ですから，図６のような六角形になります。（２）同様にこの六角形の辺をのばして正三角形を作ると，図７のようになります。切断面の六角形の面積は，１辺が１㎝の正三角形の面積の，３.１１３２÷０.４３＝７.２４（倍）です。図７の正三角形の面積は切断面よりも１辺が１㎝の正三角形３個分大きいので，７.２４＋３＝１０.２４（倍）です。１０２４＝３２×３２より，１０.２４＝３.２×３.２ですから，ｘ＝３.２です。また，ｙ＝３.２－１×２＝１.２となって，ＰＱの長さが１.２㎝であることがわかります。

図６

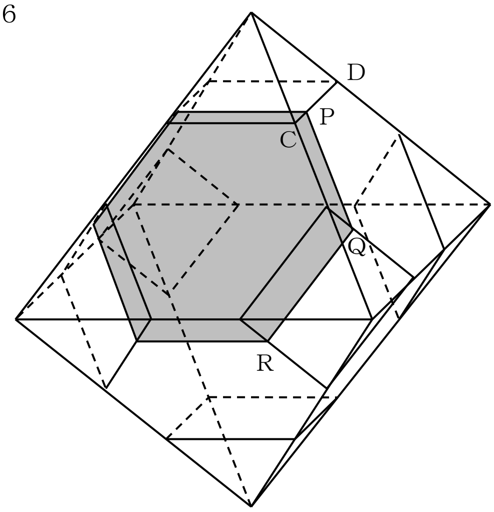
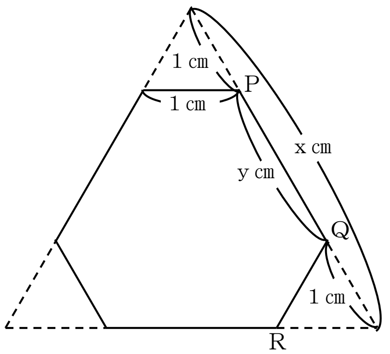


図７



ＰＱ＝１.２㎝であることから，図８の正六角形をかき出すと図９のようになります。よって，ＣＰ：ＰＤ＝（１.２－１）:（２－１.２）＝１：４です。

図８

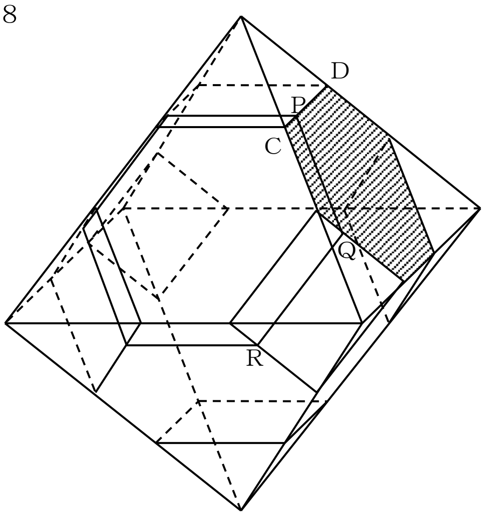


図９