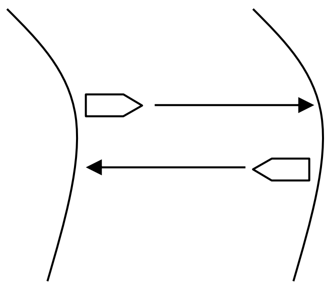
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

渡河の差集め算



　ある団体がハイキングにいきました。途中の川には漁船が１艘あり，決まった人数ずつ漁船に乗り込み，対岸に着くと１人を残して対岸に下ります。残った１人は漁船を使って戻ってきます。このことを全員が川を渡りきるまでくり返しますが，最後の１回は決まった人数より少なくなってもよいものとします。

（１）漁船に毎回４人ずつ乗り込むことにした場合を，毎回５人ずつ乗り込むことにした場合と比べると，漁船の往復が３回多くなりました。ハイキングに参加した人数として考えられるもののうちで，最も少ないものと最も多いものを答えなさい。

（２）漁船に毎回定員の人数ずつ乗り込むことにした場合を，定員より３人少なく乗り込むことにした場合と比べると漁船の往復が３回多くなりました。

①　漁船の定員が１３人の場合，ハイキングに参加した人数として考えられる人数は何通りありますか。

②　ハイキングに参加した人数として考えられる人数は３１０通りでした。漁船の定員は何人ですか。

最難関問題

渡河の差集め算　（１）最少…２９人，最多…４６人　（２）①　３６通り　②３３人

（１）毎回５人ずつ乗り込む場合，対岸に下りるのは５－１＝４（人）です。また，最後の１回については，対岸に下りるのは多くて５人，少なくて２人です。１人の場合は１つ前の回で漁船に乗った全員が対岸に下りるので，あり得ません。こうして，対岸に下りた人数を次のように整理することができます。

５人ずつ：	４	…	４					２～５
４人ずつ：	３	…	３	３	３	３		２～４
差　：	１	…	１		６～１１			

図の右側部分の人数の差は，５人ずつ乗り込む場合の最後の人数が５人で，４人ずつ乗り込む場合の最後の人数が２人の場合の３×３＋２－５＝６（人）以上，５人ずつ乗り込む場合の最後の人数が２人で，４人ずつ乗り込む場合の最後の人数が４人の場合の３×３＋４－２＝１１（人）以下となります。
５人ずつ乗り込む場合の最後の人数が５人で，４人ずつ乗り込む場合の最後の人数が２人の場合，
ボートで対岸に渡った回数は５人ずつでは６÷１＝６（回）と最後の１回を加えて７回で，参加した人数は４×６＋５＝２９（人）です。同様にしてそれぞれの場合の参加人数を求めていくと，下の表のようになります。

５人ずつのときの最後の人数	5	5	4	5	4	3	4	3	2	3	2	2
４人ずつのときの最後の人数	2	3	2	4	3	2	4	3	2	4	3	4
図の右側部分の人数の差	6	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	11
参加人数	29	33	32	37	36	35	40	39	38	43	42	46

よって，参加人数は最も少なくて２９人，最も多くて４６人です。

（２）

①　（１）と同様にして，対岸に下りた人数を次のように整理することができます。

13人ずつ：	12	…	12				２～13
10人ずつ：	９	…	９	９	９	９	２～10
差　：	３	…	３		27		□

ここで，３…３の合計と２７はどちらも３の倍数なので，漁船に最後に乗り込んだ人数の差である□も３の倍数です。では，□が３の倍数となるような人数の組み合わせは何通りあるでしょうか。

□＝３となる場合は，１０人ずつ乗り込むときの最後の人数が２人，３人，４人の場合を合わせると，１３－１＝１２（通り）です。というのも，２，３，４は３で割ったときの余りが２，０，１となって，÷３の剰余が一通りそろうからです。同様に，５，６，７で１２通り，８，９，１０で１２通りですから，１２×３＝３６（通り）の組み合わせが可能です。

では，ハイキングに参加した人数も３６通りになるのでしょうか。そこで，最後に漁船に乗った人数の組み合わせが異なるものの，参加人数は等しくなる場合があるかどうかを考えます。１３人ずつ乗り込んだ場合に注目すると，参加人数は（１２の倍数）＋（最後に漁船に乗った人数）となります。２～１３の整数は１２で割ると余りが２，３，４，…，０，１となるので，重複しません。よって，１３人ずつ乗り込んだ場合の最後に乗った人数が異なる場合，参加人数は確実に異なります。そこで，例えば最後に乗った人数が２人の場合を考えます。このとき，１０人ずつ乗り込んだ場合の最後の人数は２人，５人，８人のいずれかですから，□は０，３，６のいずれかとなります。

13人ずつ：	12	…	12				２
10人ずつ：	９	…	９	９	９	９	（２，５，８）
差　：	３	…	３		27		０，３，６

□が異なれば，漁船で川を渡った回数が異なるので，参加人数は異なってきます。このようにして，漁船に乗った人数の組み合わせが異なれば，ハイキングの参加人数も異なることから，ハイキングに参加した人数は３６通り考えられます。

②　①の３６通りが求めやすかったのは，１０人ずつ乗り込んだときの最後に漁船に乗った人数が２人以上１０人以下の１０－１＝９（通り）で，９が３の倍数だったからです。このとき，参加人数は（１３－１）×（１０－１）÷３＝３６（通り）でした。よって，(定員より３人少ない人数－１）が３の倍数となる場合についてまずは考えます。

・(定員より３人少ない人数－１）＝３では，参加人数は６×３÷３＝６（通り）

・(定員より３人少ない人数－１）＝６では，参加人数は９×６÷３＝１８（通り）

・(定員より３人少ない人数－１）＝９では，参加人数は１２×９÷３＝３６（通り）

・(定員より３人少ない人数－１）＝１２では，参加人数は１５×１２÷３＝６０（通り）

このようになるので，３１０通りに近い場合を探すと，

・(定員より３人少ない人数－１）＝２７では，参加人数は３０×２７÷３＝２７０（通り）

・(定員より３人少ない人数－１）＝３０では，参加人数は３３×３０÷３＝３３０（通り）

を見つけることができます。ここまでくると，２７０，３１０，３３０という数値の間隔から，(定員より３人少ない人数－１）＝２９だろうと予想はできますが，しっかりと確認をします。

（定員より３人少ない人数－１）＝２８の場合，

32 人ずつ：	31	…	31				２～32
29 人ずつ：	28	…	28	28	28	28	２～29
差　：	3	…	3		84		□

２９人ずつ乗り込んだ場合の最後の人数が２人･３人･４人に対して参加人数は３２－１＝３１(通り）考えられるので，同様にして２６人・２７人・２８人までの９組に対して３１通りで，３１×９＝２７９（通り）になります。２９人の場合は，２９との差が3の倍数となるような３２人ずつ乗り込んだ場合の最後の人数が２人，５人，８人，１１人，１４人，１７人，２０人，２３人，２６人，２９人，３２人で１１通りなので，２７９＋１１＝２９０（通り）となって，３１０通りにはなりません。

最難関問題

（定員より３人少ない人数－１）＝２９の場合，

33人ずつ：	32	…	32				２～33
30人ずつ：	29	…	29	29	29	29	２～30
差　：	3	…	3		87		□

３０人ずつ乗り込んだ場合の最後の人数が２人･３人･４人に対して参加人数は３３－１＝３２(通り)考えられるので，同様にして２６人・２７人・２８人までの９組に対して３２通りで，３２×９＝２８８（通り）になります。２９人の場合は，２９との差が3の倍数となるような３３人ずつ乗り込んだ場合の最後の人数が２人，５人，８人，１１人，１４人，１７人，２０人，２３人，２６人，２９人，３２人で１１通りです。また，３０人の場合は，３０との差が3の倍数となるような３３人ずつ乗り込んだ場合の最後の人数が３人，６人，９人，１２人，１５人，１８人，２１人，２４人，２７人，３０人，３３人で１１通りです。こうして，２８８＋１１×２＝３１０（通り）となって，条件を満たします。よって，定員は３３人です。