最難関問題

根基６の整数より２大きい数

素因数分解をしたときに素数の２と３が１個以上現れ，それ以外の素数が現れない整数を，２×３＝６より，根基が６の整数といいます。

（１）２１６以下の根基６の整数は何個ありますか。

（２）根基６の整数より２大きい７の倍数で，１０００以下のものをすべてこたえなさい。

（３）根基６の整数より２大きい７の倍数で，一の位が０である１００００以下のものをすべて答えなさい。

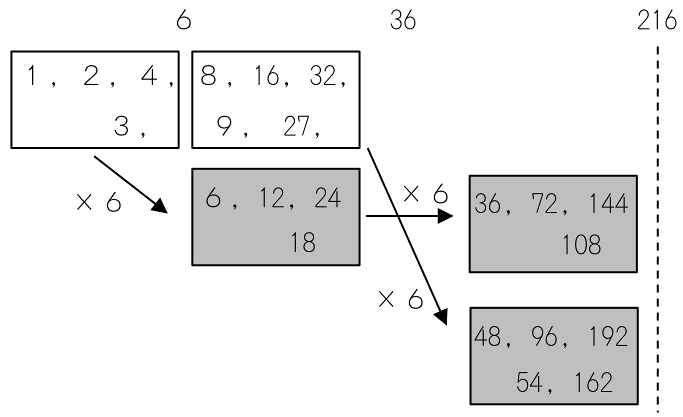
最難関問題

根基６の整数より２大きい数

（１）１４個　（２）１４，５６，９８，４３４，７７０　（３）７７０，８７４８

（１）根基が６の整数を素因数分解すると，２×…×２×３×…×３となるので，２と３をかけるられるだけかけて６に変えると，１×６×…×６か，２×…×２×６×…×６か，３×…×３×６×…×６の形になります。

１および２×…×２と３×…×３の形の数に６をいくつかかけるという点に注目して数を並べると，次のようになります。



２１６以下の根基６の整数は，色をつけた枠に囲まれた１３個の整数と２１６で，１４個です。

（２）たとえば，（１）の１４個のうちでは，１２，５４，９６にそれぞれ２を加えると１４，５６，９８という7の倍数になります。同様に，４３２＋２＝４３４，７６８＋２＝７７０も条件を満たします。

最難関問題

（３）根基６の整数のうちで，７で割って５余る整数が，２を加えると７の倍数になります。根基６の整数が１×６×…×６か，２×…×２×６×…×６か，３×…×３×６×…×６の形で表せることに注目をして，７で割ったときの余りについて考えます。

１，２，４，８，…を７で割ったときの余りは，１，１×２＝２，２×２＝４，４×２÷７＝１余り１より１，１×２＝２，…となって，１，２，４のくり返しです。これらを６倍した数を７で割ったときの余りは，１×６＝６，２×６÷７＝１余り５より５，４×６÷７＝３余り３より３…となって，６，５，３のくり返しです。さらに，７で割った余りが６，５，３の数を６倍した数を７で割った余りは，６×６÷７＝５余り１より１，５×６÷７＝４余り２より２，３×８÷７＝２余り４より４より１，２，４となって，もとに戻ります。

１，３，９，２７，…に関しても同様に余りを求めると以下のようになります。

	１，２，４，８，…
÷７の余り	１，２，４，１，…
×６	６，５，３，６，…
	ア

	１，３，９，27，…
÷７の余り	１，３，２，６，４，５，１，…
	ウ
×６	６，４，５，１，３，２，６，…
	イ

７で割って余りが５になる根基６の整数は，○で囲ったア，イ，ウの部分です。

ア…２，１６，１２８，１０２４，…に６を奇数回かけた整数で，以下のようになります。

２→１２，４３２，…一の位はすべて２×６＝１２より，２

１６→９６，…一の位はすべて６×６＝３６より，６

１２８→７６８，…一の位はすべて８×６＝４８より，８

１０２４→６１４４，…一の位はすべて４×６＝２４より，４

イ…９，６５６１（※３を８個かけた数），…に６を奇数回かけた整数で，以下のようになります。

９→５４，１９４４，…一の位は全て４

６５６１→１００００を確実に超える

ウ…２４３などに６を偶数回かけた整数で，以下のようになります。

２４３→８７４８，…一の位はすべて８

２を加えて一の位が０になる整数の一の位は８なので，７６８と８７４８が条件を満たします。

よって，７６８＋２＝７７０，８７４８＋２＝８７５０が答えとなります。