受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

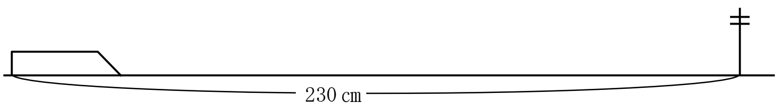
最難関問題

長さと速さ・１

ある鉄道模型では，列車の一両の長さが１０㎝で，車両をつないで線路の上を走らせることができます。列車の速さは，２両編成のときに１両編成の$\frac{1}{2}$倍，３両編成のときに１両編成の$\frac{1}{3}$倍，…というように，車両の数に反比例します。この模型について，以下の問いに答えなさい。ただし，車両と車両の連結部分の長さは考えません。

（１）図１のように，走っている列車の先に電信柱があり，列車の最後尾と電信柱は２３０ｍ離れています。列車が２両編成のときと７両編成のときでは，列車の先頭が電信柱に並ぶまでにかかる時間の差が１０秒になります。

図１

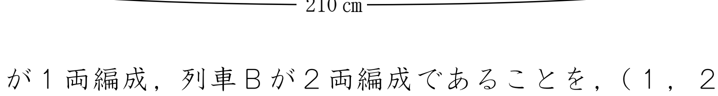


①　列車が７両編成のとき，図１の状態から列車の先頭が電信柱に並ぶまでに，何秒かかりますか。

②　列車の編成が７両以外で，図１の状態から列車の先頭が電信柱に並ぶまでに①と等しい時間がかかる場合が１つあります。それは，何両編成のときですか。

（２）図２のように，向かいあって走っている列車ＡとＢの最後尾が２１０㎝離れているとき，次の問いに答えなさい。ただし，列車Ａの方が列車Ｂより短いものとします。

図２



①　列車Ａが１両編成，列車Ｂが２両編成であることを，（１，２）と表します。図２の状態から列車ＡとＢの先頭が並ぶまでにかかる時間が（１，２）のときと等しいような列車ＡとＢの車両編成の組み合わせが３つあります。３つの組み合わせを答えなさい。

②　①以外で，列車ＡとＢの車両編成の４つの組み合わせで図２の状態から列車ＡとＢの先頭が並ぶまでにかかる時間が等しいものが２つあります。そのような４つの組み合わせを２つとも答えなさい。

最難関問題

長さと速さ・１

（１）①１６秒　②１６両編成

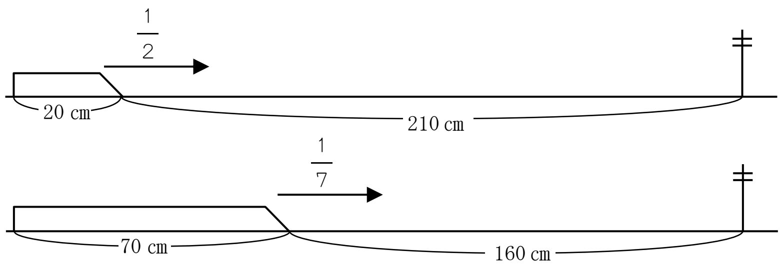
（２）①（１，６），（２，１２），（６，１２）

　　②（２，４），（２，５），（４，１０），（５，１０）

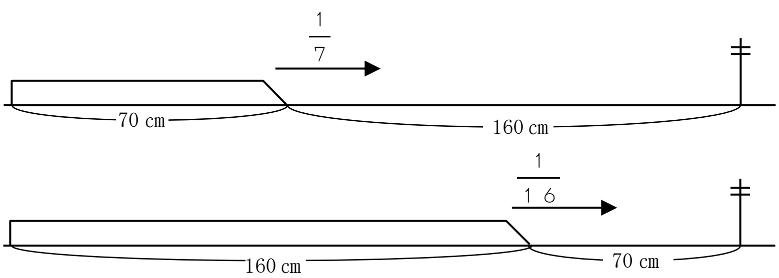
　　　（３，４），（３，６），（４，８），（６，８）

（１）

①　列車が２両編成のときと７両編成のときの，列車の先頭から電信柱までの距離の比は，（２３０－２０）:（２３０－７０）＝２１：１６です。また，列車の速さはそれぞれ１両編成のときの$\frac{1}{2}$倍と$\frac{1}{7}$倍なので，速さの比は$\frac{1}{2}$：$\frac{1}{7}$＝７：２です。よって，時間の比は（２１÷７）:（１６÷２）＝３：８です。比の差の８－３＝５が１０秒にあたるので，比の８は１６秒です。



②　①より，列車の速さの比は列車の車両数の比の逆比になり，電信柱と列車の先頭の間の距離の比は，（２３０－列車の長さ）＝（２３－列車の車両数）×１０より，（２３－列車の車両数）の比になります。よって，７両編成と２３－７＝１６（両）編成の列車では，速さの比が$\frac{1}{7}$：$\frac{1}{16}$＝１６：７，距離の比も（２３－７）:（２３－１６）＝１６：７となるので，時間の比が等しくなります。

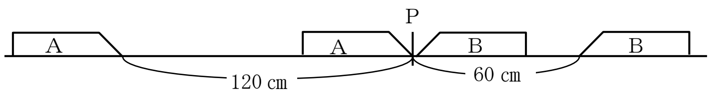


以上より，列車の先頭が電信柱と並ぶまでの時間が７両編成のときと等しいのは，１６両編成のときです。

最難関問題

（２）

①　列車ＡとＢの先頭の間の距離は，２１０－（１＋２）×１０＝１８０（ｍ）で，列車ＡとＢの速さの比は車両数の比の逆比で２：１ですから，１８０×$\frac{2}{1+2}$＝１２０（㎝），１８０×$\frac{1}{1+2}$＝６０（㎝）より，列車ＡとＢの先頭が並ぶ地点をＰとすると，下の図のようになります。



（１）より，列車Ａの先頭がＰ地点に重なるまでの時間は，１両のときと１２０÷１０＝１２（両）のときで等しくなり，列車Ｂの先頭がＰ地点に重なるまでの時間は，２両のときと６０÷１０＝６（両）のときで等しくなります。よって，列車Ａが１両編成か１２両編成で，Ｂが２両編成か６両編成のときに，列車ＡとＢの先頭はＰ地点で，いずれも等しい時間で並びます。ただし，列車Ａのほうが列車Ｂよりも短いので，（１，６），（２，１２），（６，１２）の３通りです。

※なお，これ以外の場合で列車ＡとＢの先頭が並ぶまでの時間が（１，２）のときと等しくなる場合があるかどうかは調べてみないとわかりません。実際には「無い」のですが，問題文で３つしかないと断っているので，調べる必要はありません。

②　①では，１０＋１２０＋６０＋２０＝２１０になるので，１０㎝で割ると１＋１２＋６＋２＝２１となります。また，ＡとＢの速さの比は２：１で，先頭が並ぶまでの時間は$\frac{12}{2}=\frac{6}{1}$より等しくなるので，１×１２＝２×６が成り立ちます。つまり，２１を異なる４つの数（小さい順に○，△，□，☆）に和分解して，○×☆＝△×□になれば，列車ＡとＢの車両数が（○，△），（○，□），（△，☆），（△，□）のときで等しくなります。２１÷４＝５であることから，５の近くの数の組み合わせを考えると，４＋５＋６＋７＝２２では４つの数の和が２１より大きくなってしまうので，○は３以下です。また，３＋４＋５＋６＝１８では４つの数の和が２１より小さくなってしまうので，☆は７以上です。このことから，○の値に注目をして場合分けをします。

最難関問題

○＝１の場合

☆が素数だと，○×☆＝１×☆＝☆は素数なので，☆を△×□に積分解することができません。よって，☆は７以上の素数ではない整数です。☆＝８のとき，１×８＝２×４，１＋２＋４＋８＝１５より，条件を満たしません。同様に調べていくと，条件を満たすのは☆＝１２のときの１×１２＝２×６，１＋２＋６＋１２＝２１のみですが，これは①の場合です。

○＝２の場合

☆が素数だと，○×☆＝２×☆は（素数×別の素数）なので，２×☆の約数は１，２，☆，２×☆の４個ですから，○より小さい数が現れてしまいます。よって，☆は７以上の素数ではない整数です。調べていくと,条件を満たすのは☆＝１０のときの２×１０＝４×５,２＋４＋５＋１０＝２１のみです。よって,（２，４),（２，５）（４，１０),（５，１０）です。

○＝３の場合

☆は７以上の素数ではない整数です。調べていくと，条件を満たすのは☆＝８のときの
３×８＝４×６，３＋４＋６＋８＝２１のみです。
よって,（３，４),（３，６）（４，８),（６，８）です。

以上より，
（２，４),（２，５),（４，１０),（５，１０）と,（３，４),（３，６),（４，８),（６，８）です。

※なお，以上の○×☆＝△×□で○＋△＋□＋☆＝２１となるときの（○，△),（○，□),（△，☆),（△，□）以外の場合で列車ＡとＢの先頭が並ぶまでの時間が等しくなる４つの組があるかどうかは調べてみないとわかりません。実際には「無い」のですが，問題文で２つしかないと断っているので，調べる必要はありません。