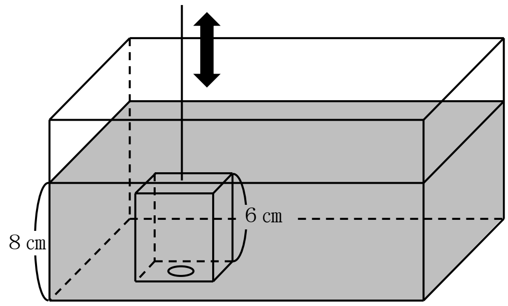
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

容器の上下運動

図のように，直方体の形をした水そうと容器があり，底面積の比は５：１です。容器は高さ６㎝で，底面に穴が開いています。底面の穴からは１秒間に容器の水面を$\frac{2}{3}$㎝上下させる分の水が出入りします。また，容器の上の面には空気のみを通す細かい穴と細い棒がついていて，棒を使って容器を上下に動かすことができます。



最初，容器は図のように水そうの底に沈んでおり，水でいっぱいになっています。また，水そうの水面の高さは８㎝です。ここから，細い棒を持って容器を毎秒１㎝の速さで上に動かします。容器の底面と水そうの水面が等しい高さになると，今度は容器が水そうの底に沈むまで毎秒１㎝の速さで下に動かします。この動きを何度も繰り返します。水そう・容器・細い棒の厚みは考えません。

（１）１回目に容器の底面と水そうの水面が等しい高さになるのは，容器を動かし始めてから何秒後ですか。

（２）（１）の後で容器の水面と水そうの水面が等しい高さになるのは，容器を動かし始めてから何秒後ですか。

（３）（１）の後で容器が水でいっぱいになるのは，容器を動かし始めてから何秒後ですか。

（４）容器を動かし始めてから５０秒後，容器の水面は容器の底面から何㎝の高さにありますか。

最難関問題

容器の上下運動（１）$7\frac{7}{13}$秒後　（２）$8\frac{42}{65}$秒後　（３）$15\frac{19}{65}$秒後　（４）$4\frac{2}{13}$cm

（１）容器の底面積を１とすると水そうの底面積は５ですから，水の量は５×８㎝＝４０と表せます。容器を動かし始めてから２秒後，図１のように容器の上の面と水そうの水面の高さが一致します。ここまでは，容器が完全に水の中にあるので穴を通って水が出て行くことはありません。

２秒後を過ぎると容器の上の面は水そうの水面より上に出るので，容器の底の穴から水が流れ出します。それから１秒間で容器の水面は$\frac{2}{3}$cm下がるので，３秒後は図２のように容器の水面は$3+6-\frac{2}{3}=8\frac{1}{3}$（cm）となり，水そうの水面の高さはアとなります。斜線部分の水の量は等しいので，$1\times\frac{1}{3}\div4=\frac{1}{12}$（cm）より，ア＝$8-\frac{1}{12}=7\frac{1}{12}$（cm）です。

図１

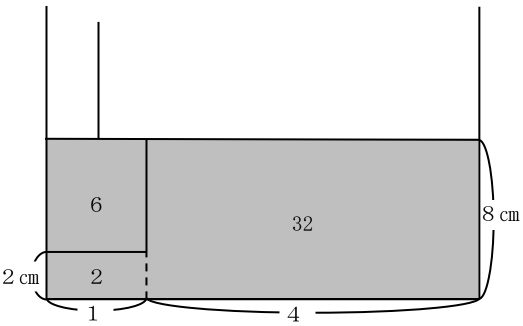
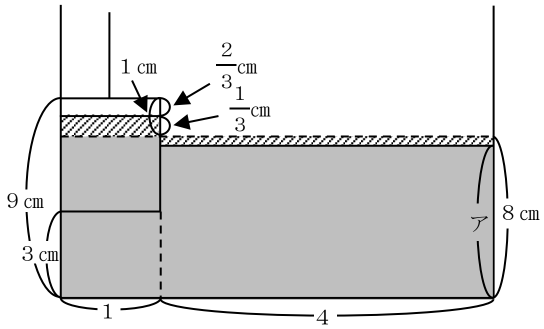


図２

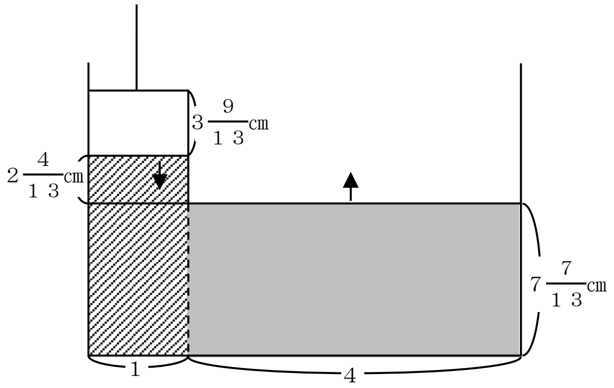


よって，２秒後を過ぎてからは容器の底面は毎秒１cmの速さで上がり，水そうの水面は毎秒$\frac{1}{12}$cmの速さで下がります。そのため，この動きが続くのであれば，容器の底面と水そうの水面の高さは，$2+6\div\left(1+\frac{1}{12}\right)=2+5\frac{7}{13}=7\frac{7}{13}$（秒）で等しくなります。$7\frac{7}{13}$秒後，容器の水面は$\frac{2}{3}\times5\frac{7}{13}=3\frac{9}{13}$（cm）下がるので，まだ容器の中に水は残っています。よって，$7\frac{7}{13}$秒後です。

最難関問題

（２）$7\frac{7}{13}$秒後は図３のようになります。

図３



ここから，容器の水面は毎秒$1+\frac{2}{3}=1\frac{2}{3}$（cm）下がるので，斜線部分の水量は毎秒$1\times1\frac{2}{3}=1\frac{2}{3}$減ります。よって，影をつけた部分の水量は毎秒$1\frac{2}{3}$増え，水面は毎秒$1\frac{2}{3}\div4=\frac{5}{12}$（cm）上がります。$2\frac{4}{13}\div\left(1\frac{2}{3}+\frac{5}{12}\right)=1\frac{7}{65}$（秒）で２つの水面の高さは等しくなりますから，$7\frac{7}{13}+1\frac{7}{65}=8\frac{42}{65}$（秒後）です。

最難関問題

（３）図３の状態から$1\frac{7}{65}$秒で容器の底面は$1\times1\frac{7}{65}=1\frac{7}{65}$（cm）下がるので，容器と水そうの水面の高さが等しくなったとき，図４のように容器の底面は水そうの底面から$7\frac{7}{13}-1\frac{7}{65}=6\frac{28}{65}$（cm）のところにあります。ここから先，容器は図５のように再び水そうの底面につき，次に図６のように引き上げられますが，その間で容器が満水になるまで穴から水が容器に入り続けます。

図４

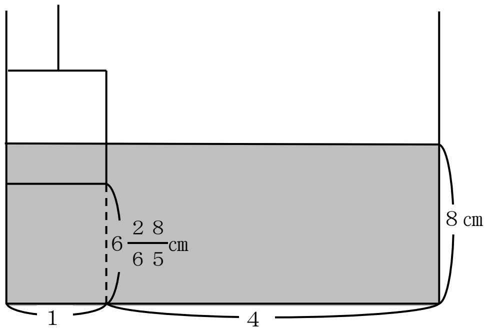


図５

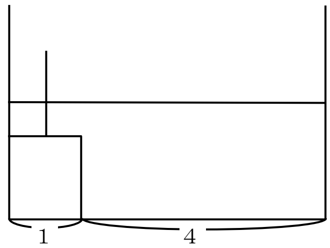


図６

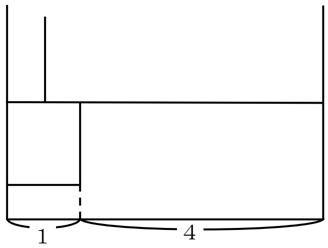
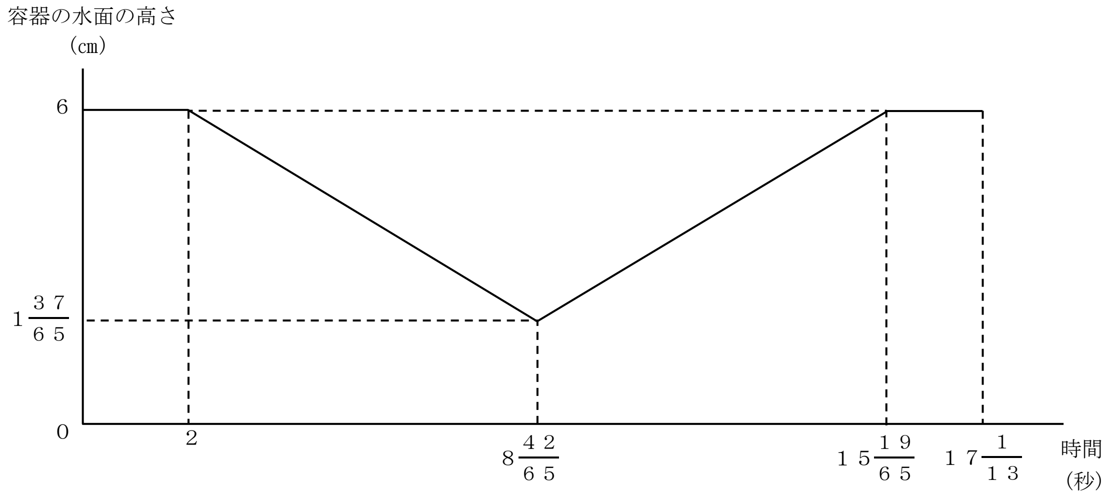


図４から図５の状態になるまでに容器は$6\frac{28}{65}$cm下がり，図５から図６の状態になるまでに容器は２cm上がるので，あわせて（$6\frac{28}{65}$＋２）÷１＝$8\frac{28}{65}$（秒）かかります。他方で，容器は$8\frac{42}{65}-2=6\frac{42}{65}$（秒）水が底面の穴から出ていたので，再び満水になるのにかかる時間も$6\frac{42}{65}$秒ですから，図６の状態になる前に容器は満水になります。よって，$8\frac{42}{65}+6\frac{42}{65}=15\frac{19}{65}$（秒後）です。

最難関問題

（４）容器の底面から測った容器の水面の高さと時間の関係をまとめます。最初の２秒間は，高さは６㎝のまま変わりません。次に，（２）で求めた$8\frac{42}{65}$秒後まで，容器の水面は毎秒$\frac{2}{3}$㎝の速さで下がり続け，$1\frac{37}{65}$㎝になります。その次は，（３）で求めた$15\frac{19}{65}$秒まで，容器の水面は毎秒$\frac{2}{3}$㎝の速さで上がり続け，再び６㎝になります。（２）の図６のように容器の上の面が再び水そうの水面と等しい高さになるのは，（３）の図４の$8\frac{28}{65}$秒後ですから，容器を動かし始めてから$8\frac{42}{65}+8\frac{28}{65}=17\frac{1}{13}$（秒後）です。ここまでをグラフにすると，次のようになります。



$17\frac{1}{13}$秒後以降は，グラフの２秒後～$17\frac{1}{13}$秒後の$15\frac{1}{13}$秒間をくり返します。よって，５０秒後の容器の水面の高さは，$(50-2)\div15\frac{1}{13}=3$余り$2\frac{10}{13}$秒より，上のグラフにおいて$2+2\frac{10}{13}=4\frac{10}{13}$（秒後）の水面と同じです。以上より，$6-\frac{2}{3}\times2\frac{10}{13}=4\frac{2}{13}$（㎝）です。