

ピタゴラス三角形と内接円・2

次の問いに答えなさい。円周率は3.14とします。

- (1) 図1は、ある三角形ABCの辺上の点D, E, Fに円周が接する円を描いたものです。AB = 10 cm, BC = 13 cm, CA = 11 cmのとき、ADの長さは何cmですか。
- (2) 図2は、ある直角三角形ABCの辺上の点D, E, Fに円周が接する円を描いたものです。BC = 132 cm, CA = 157 cmで、円の半径が30 cmのとき、ABの長さは何cmですか。
- (3) 図3は、3辺の長さがcmの単位で整数のある直角三角形ABCの辺上の点D, E, Fに円周が接する円を描いたものです。頂点Bから辺ACに垂直な線BHを引くと、BHの長さが26.88 cmとなり、円の半径が12 cmのとき、AB, BC, CAの長さは何cmですか。ただし、ABの長さはBCの長さと同じか、より短いものとします。

図1

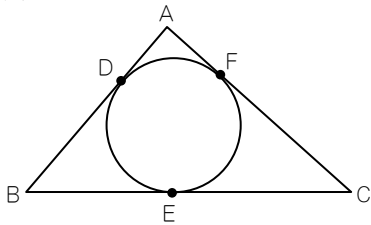


図2

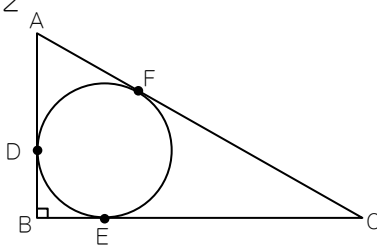
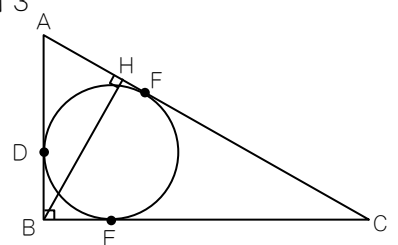
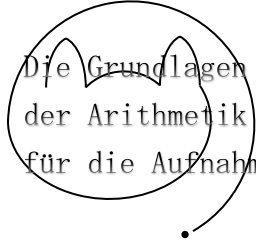


図3





ピタゴラス三角形と内接円・2

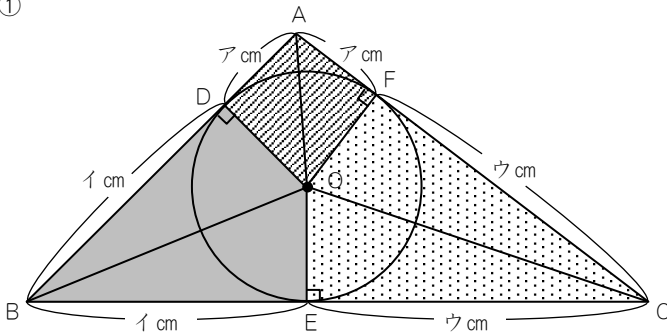
(1) 4 cm (2) 85 cm (3) $AB = 28 \text{ cm}$, $BC = 96 \text{ cm}$, $CA = 100 \text{ cm}$

(1) 図①のように円の中心OとD, E, Fを結ぶと, それぞれの辺と垂直に交わる線になります。斜線部分の三角形OADとOAF, 影をつけた三角形OBDとOBE, あみ目部分の三角形OCEとOCFはそれぞれ合同なので, ア~ウの長さの関係が成り立ちます。

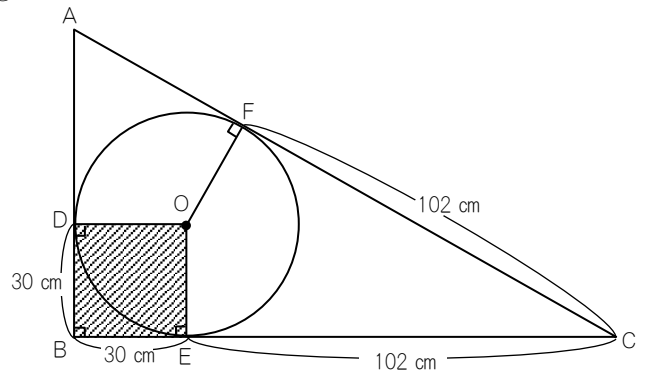
ア+イ=10, イ+ウ=13, ウ+ア=11という式を解いて, ア=4, イ=6, ウ=7となるので, ADの長さは4 cmです。

(2) 図②のように円の中心OとD, E, Fを結んで考えると, 四角形DBEOは1辺の長さが30 cmの正方形になります。EC=132-30=102 (cm) より, CFの長さも102 cm, AF=157-102=55 (cm) より, ADの長さも55 cmなので, AB=55+30=85 (cm) です。

図①



図②



(3) 三角形ABCの面積の求め方を考えると、 $CA \times BH = (AB + BC + CA) \times OD$ が成り立つので、
 $CA \times 26.88 = (AB + BC + CA) \times 12$ 、
 $26.88 : 12 = 56 : 25$ より、
 $CA : (AB + BC + CA) = 25 : 56$ 、
 $CA : (AB + BC) = 25 : 31$ 、が成り立ちます。
 また、 $CA = AF + CF = AD + CE$ より、 $CA = AB - 12 + BC - 12 = AB + BC - 24$ となる
 ので、 $25 : 31$ の比の差の6が24cmにあたります。よって $CA = 25 \times \frac{24}{6} = 100$ (cm) です。
 改めて三角形ABCの面積を考えると、 $CA \times BH = 100 \times 26.88 = 2688 = AB \times AC$ が
 成り立つので、ABとACは積が2688で和が $31 \times \frac{24}{6} = 124$ の整数です。素因数分解をする
 と、 $2688 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$ であり、ここから探していくと、
 $2 \times 2 \times 7 = 28$ と $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 96$ が、 $28 + 96 = 124$ となって条件を満たします。
 よって、 $AB = 28$ cm、 $BC = 96$ cmです。

図③

