受験算数の基礎

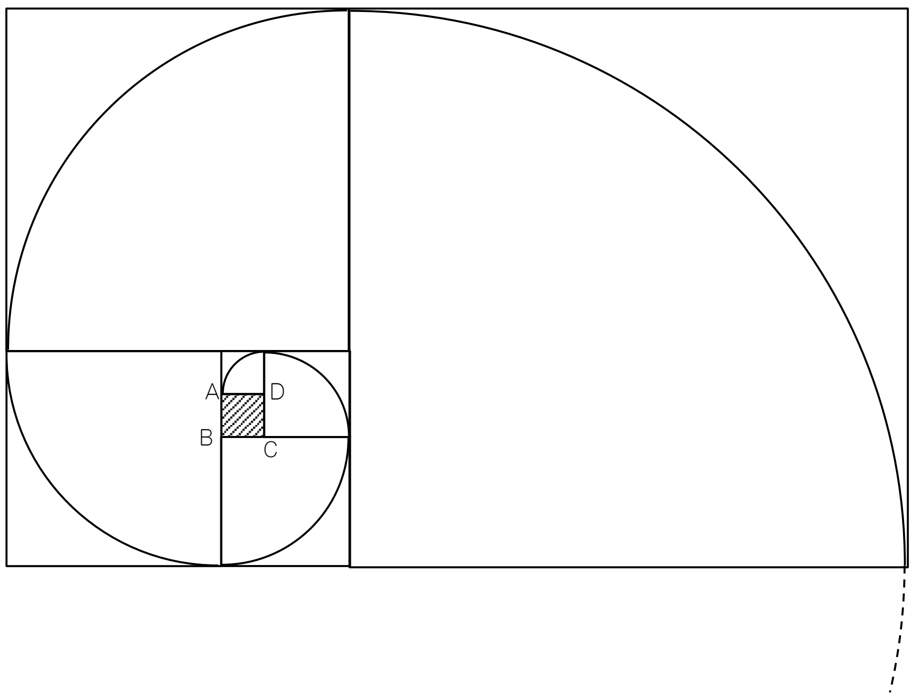
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

フィボナッチ螺旋と点移動・２

　下のように，１辺１㎝の正方形ＡＢＣＤの周りに正方形と中心角９０度のおうぎ形を並べていくことででできる，おうぎ形の弧が螺旋（ぐるぐるした渦の形）を描くような図形があります。

　点Ｐは毎秒１.５７㎝の速さで，点Ａから出発してこの螺旋の上を進んでいきます。円周率は３.１４とします。



（１）３秒後，５秒後に３つの点Ａ，Ｂ，Ｐを結んでできる三角形ＡＢＰの面積を求めなさい。

（２）３９秒後に３つの点Ｂ，Ｃ，Ｐを結んでできる三角形ＢＣＰの面積を求めなさい。

（３）３つの点Ａ，Ｂ，Ｐを結んでできる三角形ＡＢＰの面積が，初めて１１㎝^{2}になるのは，点Ｐが出発してから何秒後ですか。

（４）３つの点Ａ，Ｂ，Ｐを結んでできる三角形ＡＢＰの面積が，４回目に１６.５㎝^{2}になるのは，点Ｐが出発してから何秒後ですか。

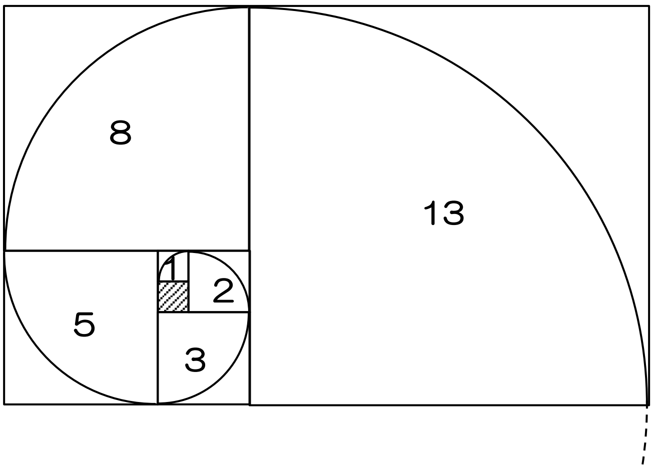
最難関問題

フィボナッチ螺旋と点移動・２

（１）1.5㎝^{2}，０.７５㎝^{2}（２）6.７５㎝^{2}　（３）６４$\frac{1}{3}$秒後　（４）３２７秒後

（１）正方形の１辺とおうぎ形の半径の長さは，図①のようになります。また，半径１㎝のおうぎ形に注目をすると，弧の長さは１×２×３.１４×$\frac{1}{4}$＝１.５７（㎝）なので，点Ｐが通過するのにかかる時間は，１.５７÷１.５７＝１（秒）です。よって，図①の数字は，点Ｐが通過する時間（秒）と一致します。

図①



続きを考えると，表①のようなフィボナッチ数列になります。

表①

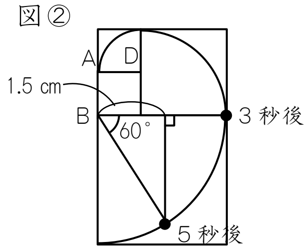
番目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
秒・㎝	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

出発してから３秒後，５秒後の点Ｐの位置は，図②のようになります。

３秒後の面積は１×３×$\frac{1}{2}$＝１.５（㎝^{2}），

５秒後の面積は１×１.５×$\frac{1}{2}$＝０.７５（㎝^{2}）です。

図②

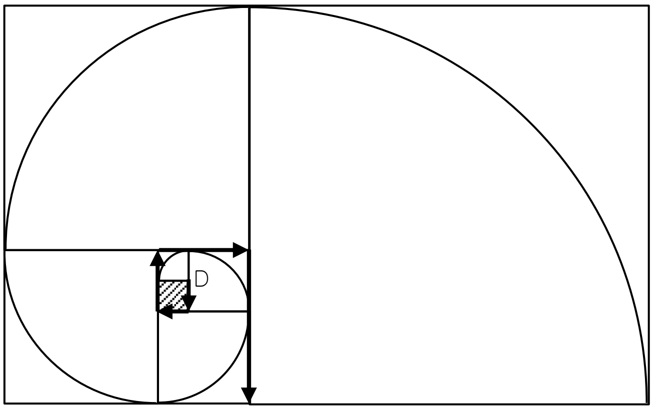


最難関問題

（２）３９秒後に点Ｐが何番目のおうぎ形の弧を進んでいるかを考えます。

１＋２＋３＋５＋８＋１３＝３２（㎝），３９－３２＝７（㎝）より，半径が２１㎝である，７番目のおうぎ形の弧を３分の１だけ進んでいます。おうぎ形の中心の位置は，最初が頂点Ｄで，下に１㎝，左に１㎝，上に２㎝，右に３㎝，下に５㎝と，向きを変えながらフィボナッチ数列の値をとって移動していきます。まとめると，表②のようになります。

図③

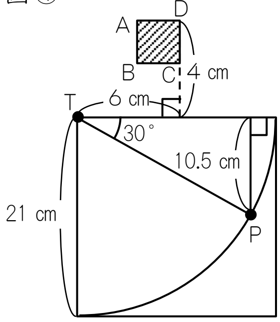


表②

右（㎝）		3	21	144
下（㎝）	1	5	34	233
左（㎝）	1	8	55	377
上（㎝）	2	13	89	610

７番目のおうぎ形の中心は，表②のかげをつけたマスまでの移動なので，
右に３㎝，下に１＋５＝６（㎝），左に１＋８＝９（㎝），上に２㎝より，
左に９－３＝６（㎝），下に６－２＝４（㎝）移動した位置です。
図④のようになるので，　三角形ＢＣＰの面積は，$1\times(4-1+10.5)\times\frac{1}{2}=6.75$（$cm^2$）です。

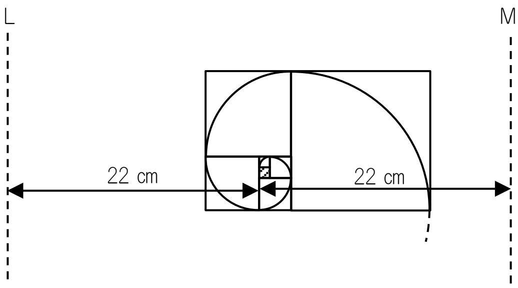
図④



最難関問題

（３）図⑤のように，ＡＢと平行で１１÷$\frac{1}{2}$＝２２（㎝）離れた直線Ｌ，Ｍに点Ｐが重なると，三角形ＡＢＰの面積は１×２２÷２＝１１（㎠）になります。

図⑤



ＡＢに対して右側に何㎝離れているかは，表③の□で囲った数を加えることで求めることができ，左側に何㎝離れているかは，かげをつけたマスの数を加えることで求めることができます。

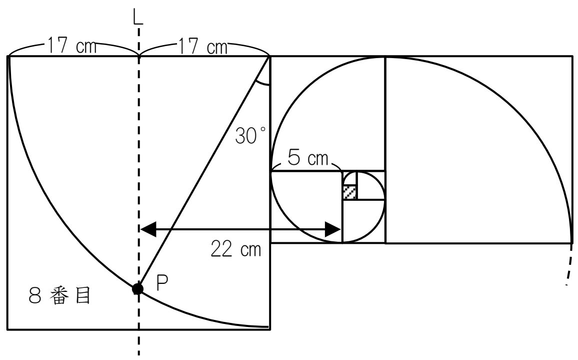
表③

番目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
秒・㎝	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

最初に２２㎝以上になるのは，８番目の正方形とおうぎ形を組みあわせたときの，
左に５＋３４＝３９（㎝）離れる場合です。このとき，図⑥のようになるので，

１＋２＋３＋５＋８＋１３＋２１＋３４×$\frac{1}{3}$＝６４$\frac{1}{3}$（秒後）です。

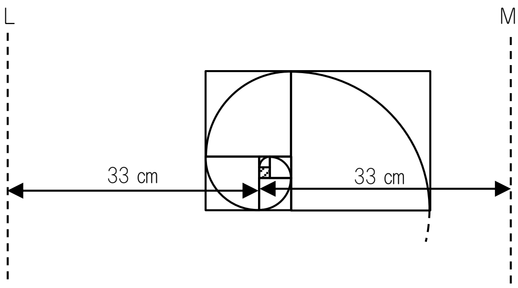
図⑥



最難関問題

（４）（３）と同様に考えて，図⑦のように，ＡＢと平行で１６.５÷$\frac{1}{2}$＝３３（cm）離れた直線Ｌ，Ｍに点Ｐが重なると，三角形ＡＢＰの面積は１×３３÷２＝１６.５（cm^2）になります。

図⑦



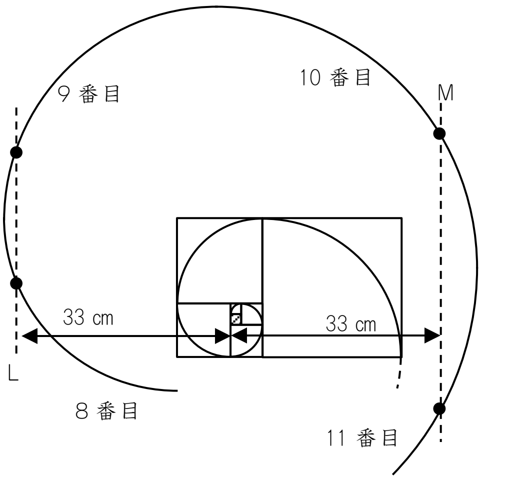
ＡＢに対して右側に何cm離れているかは，表③の□で囲った数を加えることで求めることができ，左側に何cm離れているかは，かげをつけたマスの数を加えることで求めることができます。

表③

番目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
秒・cm	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	3	5	8	$\boxed{13}$	21	34	55	$\boxed{89}$	144	233	377	$\boxed{610}$	987

最初に３３cm以上になるのは，８番目の図形を組みあわせたときの，左に５＋３４＝３９（cm）離れる場合で，次が１０番目の図形を組みあわせたときの，右に１＋２＋１３＋８９＝１０５（cm）離れる場合です。このとき，図⑧のようになって，４回目は１１番目のおうぎ形の弧とＭの交わる位置を点Ｐが通過するときです。

図⑧



最難関問題

図⑨のようになるので，

$$1+2+3+5+8+13+21+34+55+89+144\times\frac{2}{3}=327$$（秒後）です。

図⑨