

最難関問題

2つの円と棒

図1のように2つの同じ大きさの円A, Bが接しています。それぞれの円には直径と同じ長さの棒が最初は中心を通過して一直線に並んでいて、どちらも中心のまわりを同時に反時計回りに回り始めます。円Aの棒は毎秒5度、円Bの棒は毎秒1度の速さで図2のように回転します。

図1

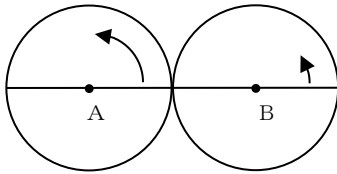
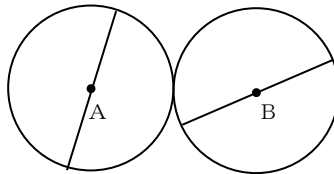


図2



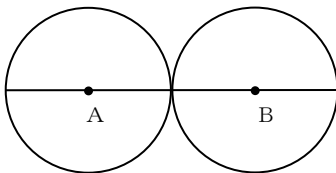
- (1) ① 回り始めてから最初に2本の棒が一直線になるのは、何秒後ですか。
 ② 回り始めてから2回目に2本の棒が一直線になるのは、何秒後ですか。
- (2) ① 2本の棒が回り始めてから最初に正方形の向かいあう辺になるのは、何秒後ですか。
 ② 2本の棒が回り始めてから2回目に正方形の向かいあう辺になるのは、何秒後ですか。
- (3) ① 2本の棒が回り始めてから最初に台形の向かいあう辺になるのは、何秒後ですか。
 ② 2本の棒が回り始めてから10回目に台形の向かいあう辺になるのは、何秒後ですか。
 ※蛇足ですが、台形の条件を満たす四角形はすべて台形とみなします。

最難関問題

2つの円と棒 (1) ① 180秒後 ② 360秒後 (2) ① 90秒後 ② 270秒後
(3) ① 30秒後 ② 240秒後

(1) 一直線になるのは, 図3のように2本の棒が水平になる場合です。Aの棒は $180 \div 5 = 36$ (秒毎) に, Bの棒は $180 \div 1 = 180$ (秒毎) に水平になるので, 36と180の最小公倍数より, 1回目は180秒後です。また, 2回目は $180 \times 2 = 360$ (秒後) です。

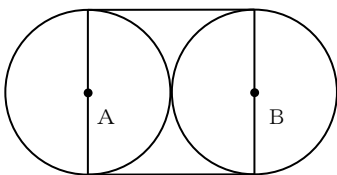
図3



(2) 正方形の向かいあう辺になるのは, 図4のように2本の棒がそれぞれ垂直になった場合です。円Aの棒は, 最初 $90 \div 5 = 18$ (秒後) に垂直になり, 以降は $180 \div 5 = 36$ (秒毎) に垂直になります。よって, 垂直になるのは18秒後, 54秒後, 90秒後, ...です。円Bの棒は, 最初 $90 \div 1 = 90$ (秒後) に垂直になり, 以降は $180 \div 1 = 180$ (秒毎) に垂直になります。

2本の棒が同時に垂直になるのは, 1回目が90秒後, 2回目は90に36と180の最小公倍数180を加えた270秒後です。

図4



最難関問題

(3) 図5, 6のような等脚台形になる場合と, 図7, 8のようなひし形になる場合に分けて考えます。

- ・等脚台形… 1回目は図5のようになります。Aの棒とBの棒はあわせて180度動いているので,
 $180 \div (5 + 1) = 30$ (秒後)です。2回目は図6のようになります。図5の状態から,
Aの棒とBの棒はあわせて180度動いているので,
 $30 + 180 \div (5 + 1) = 60$ (秒後)です。このように, 30秒ごとに等脚台形になります。

図5

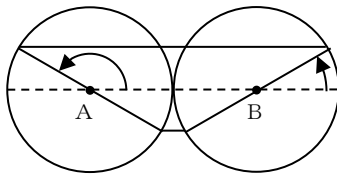
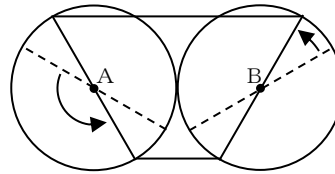


図6



- ・ひし形 …この問題では, 2本の棒が平行四辺形を作る場合, 4つの辺の長さが等しくなるので必ずひし形になります。1回目は図7のようになります。Aの棒はBの棒よりも180度多く動いているので, $180 \div (5 - 1) = 45$ (秒後)です。2回目は図8のようになります。図7の状態から, Aの棒はBの棒より180度多く動いているので,
 $45 + 180 \div (5 - 1) = 90$ (秒後)です。90秒後ですので, 正方形になります。このように, 45秒ごとにひし形になります。

図7

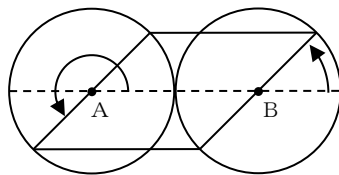
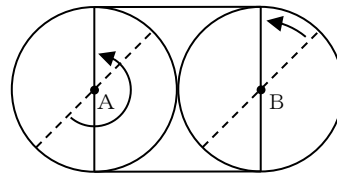


図8



以上より, 台形になるのは30と45を整数倍した時間であり, 30と45の公倍数の時間には正方形になります。ただし, 180を整数倍した時間には, 一直線となるので四角形にはなりません。この点に注意をして最初の10回の時間を書き出すと, 30, 45, 60, 90, 120, 135, 150, 210, 225, 240となりますから, 1回目は30秒後, 10回目は240秒後です。