受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

# 最難関問題

レーザー光線と小立方体のアドレス・１

１辺が１㎝の小立方体をすき間なく積んで，図１のような直方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨを作ります。対角線ＡＧ上をＡからＧに向けて進む点Ｐが通過する小立方体について，考えます。また，図２のように，後ろから２行目，左から３列目，上から４段目の小立方体を，（２，３，４）と表すことにします。

図１

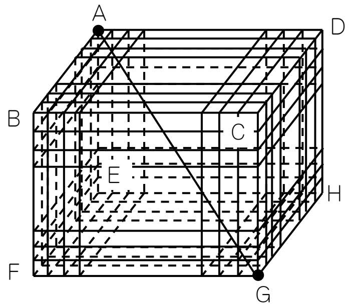
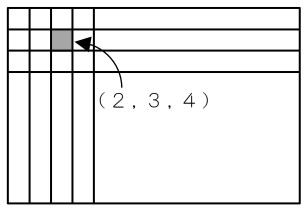



図２　（上から４段目）




（１）ＡＢ＝４㎝，ＡＤ＝５㎝，ＡＥ＝３㎝のとき，点Ｐが通過する小立方体は，
上から１段目，２段目，３段目にそれぞれ何個ありますか。

（２）ＡＢ＝４０㎝，ＡＤ＝４５㎝，ＡＥ＝３０㎝のとき，点Ｐが８番目，６４番目に通過する小立方体を，（ａ，ｂ，ｃ）の形でそれぞれ答えなさい。

（３）ＡＢ＝５４㎝，ＡＤ＝９０㎝，ＡＥ＝$\boxed{\text{イ}}$㎝のとき，点Ｐが$\boxed{\text{ア}}$番目に通過する小立方体は，（１９，３２，４８）です。$\boxed{\text{ア}}$にあてはまる最大の整数と最小の整数を答えなさい。また，そのときに$\boxed{\text{イ}}$にあてはまる整数を，それぞれすべて答えなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

# 最難関問題

レーザー光線と小立方体のアドレス・１

（１）１段目…３個，２段目…４個，３段目…３個

（２）８番目…（４，４，３），６４番目…（２９，３２，２２）

（３）最大…$\boxed{\text{ア}}$＝９１，$\boxed{\text{イ}}$＝１３４，１３６，１３７，１３９

　　最小…$\boxed{\text{ア}}$＝７０，$\boxed{\text{イ}}$＝１３５

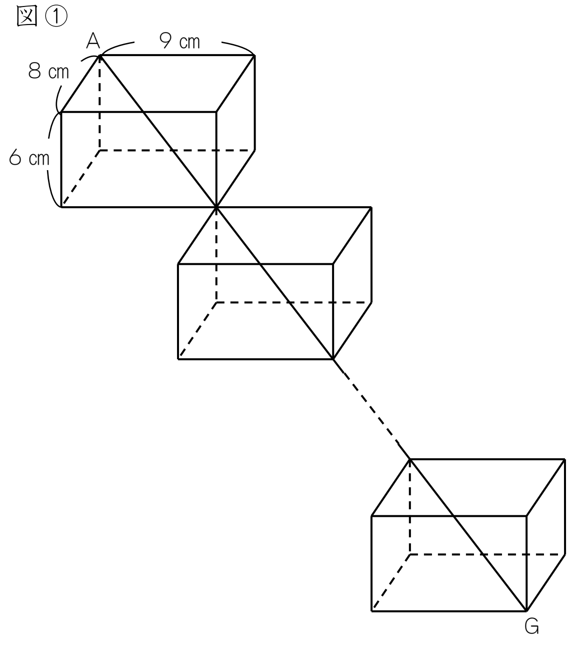
（１）点ＰがＡからＧまで１秒間で進むと考えます。１行目・１列目・１段目の立方体から行・列・段が進むのは，

行…$\frac{1}{4}$秒後，$\frac{2}{4}$秒後，$\frac{3}{4}$秒後

列…$\frac{1}{5}$秒後，$\frac{2}{5}$秒後，$\frac{3}{5}$秒後，$\frac{4}{5}$秒後

段…$\frac{1}{3}$秒後，$\frac{2}{3}$秒後です。順に並べると，$\frac{1}{5}$秒後，$\frac{1}{4}$秒後，$\frac{1}{3}$秒後，$\frac{2}{5}$秒後，$\frac{2}{4}$秒後，$\frac{3}{5}$秒後，$\frac{2}{3}$秒後，$\frac{3}{4}$秒後，$\frac{4}{5}$秒後となるので，１段目では$\frac{1}{5}$秒後と$\frac{1}{4}$秒後に新しい小立方体に進みます。最初の（１，１，１）の立方体とあわせて，３個です。$\frac{1}{3}$秒後に２段目の立方体に進み，その後，$\frac{2}{5}$秒後，$\frac{2}{4}$秒後，$\frac{3}{5}$秒後に新しい小立方体に進むので，２段目は４個です。$\frac{2}{3}$秒後に３段目の立方体に進み，その後，$\frac{3}{4}$秒後，$\frac{4}{5}$秒後に新しい小立方体に進むので，３段目は３個です。

図①




（２）４０，４５，３０を最大公約数の５で割ると，８，９，６になり，対角線ＡＧは図①のように８㎝，９㎝，６㎝の直方体の通過を５回繰り返します。点Ｐが１秒間で，８㎝，９㎝，６㎝の直方体を通過すると考えると，１行目・１列目・１段目の立方体から行・列・段が進むのは，

行…$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8}$秒後

列…$\frac{1}{9}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{9}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{7}{9}$，$\frac{8}{9}$秒後

段…$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{6}$秒後です。

# 最難関問題

$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$秒後は重複しているので，１＋７＋８＋５－３＝１８（個）の小立方体を通過します。順に並べると，

$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{9}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{9}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{8}{9}$秒後です。点Ｐが８番目に通過する小立方体は，$\frac{3}{8}$秒経過した後なので，（１，１，１）から３行，３列，２段進んで，（４，４，３）です。また，点Ｐが６４番目に通過する小立方体は，６４÷１８＝３余り１０より，３＋１＝４（回目）に通過する８㎝，９㎝，６㎝の直方体のうちの１０番目の小立方体です。１番目の小立方体は，８×３＋１＝２５，９×３＋１＝２８，６×３＋１＝１９より，（２５，２８，１９）で，１０番目に通過する小立方体は，そこから$\frac{1}{2}$秒経過した後なので，４行，４列，３段進んで，（２９，３２，２２）です。

（３）点ＰがＡからＧまで１秒間で進むと考えると，行・列・段が進む時間は，以下のようになります。

$$
\begin{array}{ccc:c}
\frac{1}{54} & \cdots\cdots & \frac{18}{54} & \frac{19}{54} \\
\frac{1}{90} & \cdots\cdots & \frac{31}{90} & \frac{32}{90} \\
\frac{1}{AE} & \cdots\cdots & \frac{47}{AE} & \frac{48}{AE}
\end{array}
$$

（１９，３２，４８）

このとき，$\frac{47}{AE}<\frac{19}{54}$が成り立つので，４７×５４＜１９×ＡＥ，１３３$\frac{11}{19}$＜ＡＥとなるので，ＡＥは１３４以上です。また，$\frac{31}{90}<\frac{48}{AE}$が成り立つので，３１×ＡＥ＜９０×４８，ＡＥ＜１３９$\frac{11}{31}$となるので，ＡＥは１３９以下です。

# 最難関問題

$\boxed{\text{ア}}$にあてはまる数が最大となるのは，分数の列$\frac{1}{\text{AE}}\cdots\frac{47}{\text{AE}}$が，$\frac{1}{54}\cdots\frac{18}{54}$および$\frac{1}{90}\cdots\frac{31}{90}$と共通する分数を全く持たない場合です。よって，ＡＥにあてはまるのは，５４および９０と互いに素である，１３７，１３９です。また，ＡＥ＝１３４，１３６の場合は２の倍数なので，$\frac{67}{134}=\frac{27}{54}=\frac{1}{2}$，$\frac{68}{136}=\frac{27}{54}=\frac{1}{2}$となりますが，$\frac{47}{\text{AE}}$および$\frac{18}{54}$までの範囲には含まれないので，この場合も共通する分数はありません。これらの場合，$\frac{1}{54}\cdots\frac{18}{54}$と$\frac{1}{90}\cdots\frac{31}{90}$の間で，$\frac{1}{18}$，$\frac{2}{18}$，$\frac{3}{18}$，$\frac{4}{18}$，$\frac{5}{18}$，$\frac{6}{18}$の６個の分数が重複するので，（１９，３２，４８）は，１＋１８＋３１＋４７－６＝９１（番目）です。

$\boxed{\text{ア}}$にあてはまる数が最小となるのは，分数の列$\frac{1}{\text{AE}}\cdots\frac{47}{\text{AE}}$が，$\frac{1}{54}\cdots\frac{18}{54}$および$\frac{1}{90}\cdots\frac{31}{90}$と共通する分数を最も多く持っている場合です。よって，ＡＥにあてはまるのは，５と２７の倍数である１３５です。５４，９０，１３５を最大公約数である９で割ると，６，１０，１５になるので，対角線ＡＧは６㎝，１０㎝，１５㎝の直方体の通過を繰り返します。点Ｐが１秒間で，６㎝，１０㎝，１５㎝の直方体を通過すると考えると，$\frac{1}{6}\cdots\frac{5}{6}$，$\frac{1}{10}\cdots\frac{9}{10}$，$\frac{1}{15}\cdots\frac{14}{15}$，という３つの分数の列の間で重複するのは，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{5}\cdots\frac{4}{5}$なので，小立方体を１＋５＋９＋１４－７＝２２（個）通過します。（６，１０，１５）は２２番目に通過する小立方体で，（１８，３０，４５）は２２×３＝６６（番目）に通過する小立方体です。６７番目の（１９，３１，４６）の小立方体を通過しはじめてから，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{2}{15}$秒を経過して，（１９，３２，４８）の小立方体を通過するので，７０番目です。