受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

和の逆数

　ａ≦ｂである２つの整数ａ，ｂの和を求める式‘ａ＋ｂ＝ｃ’について，ａ，ｂ，ｃの逆数の比を考えます。例えば，１＋２＝３の逆数の比は，$\frac{1}{1}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$＝６：３：２です。

（１）６＋８＝１４および，３０＋３３＝６３の逆数の比をそれぞれ求めなさい。

（２）ａ＋ｂ＝ｃの逆数の比が４５９：２７０：１７０になりました。このとき，ａ：ｂ：ｃを求めなさい。

（３）ａ＋ｂ＝ｃの逆数の比が，最小の整数比でx：y：６０になりました。
　このとき，ａ：ｂ：ｃとして考えられる最小の整数比をすべて答えなさい。

（４）ａ＋２３＝ｃの逆数の比が，最小の整数比でx：y：zになり，yとzの差が１４４でした。
　このとき，ｃとして考えられる値をすべて答えなさい。

（５）ａ＋ｂ＝ｃの逆数の比が，最小の整数比でx：y：zになり，xとyの差が５６でした。
　このとき，ａ：ｂ：ｃとして考えられる最小の整数比をすべて答えなさい。

最難関問題

和の逆数

（１）２８：２１：１２，２３１：２１０：１１０　（２）１０：１７：２７

（３）ａ：ｂ：ｃ＝１：６０：６１，３：２０：２３，４：１５：１９，５：１２：１７

（４）３５　（５）１３：１５：２８，５：９：１４

（１）$\frac{1}{6}:\frac{1}{8}:\frac{1}{14}$＝２８：２１：１２，$\frac{1}{30}:\frac{1}{33}:\frac{1}{63}$＝２３１：２１０：１１０です。

（２）$\frac{1}{459}:\frac{1}{270}:\frac{1}{170}$＝１０：１７：２７です。

（３）（１）では，６：８：１４＝３：４：７で，

逆比は$\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{7}=\frac{4\times 7}{3\times 4\times 7}:\frac{3\times 7}{3\times 4\times 7}:\frac{3\times 4}{3\times 4\times 7}$＝２８：２１：１２のようになっています。

３＋４＝７で３と４が互いに素の場合には，３と７，４と７も互いに素となるため，

４×７＝２８，３×７＝２１，３×４＝１２がそのまま最小の整数比になります。

よって，ａ×ｂ＝６０でａとｂが互いに素となる場合を求めて，

ａ：ｂ：ｃ＝１：６０：６１，３：２０：２３，４：１５：１９，５：１２：１７です。

最難関問題

（４）（１）（２）の逆比を見返すと，互いに素な３つの整数ａ＋ｂ＝ｃの逆比のx：y：zは，

〇３：４：７の逆比が２８：２１：１２で，yとzの差は９，

〇３０：３３：６３＝１０：１１：２１の逆比が２３１：２１０：１１０で，yとzの差は１００，

〇１０：１７：２７の逆比が４５９：２７０：１７０で，yとzの差は１００，

となっています。９＝３×３，１００＝１０×１０で，yとzの差は，最小の整数比にしたときのａ×ａと一致しています。

というのも，ａ：ｂ：ｃ＝ａ：ｂ：（ａ＋ｂ）の逆比は，次のようになるからです。

$$\frac{b\times(a+b)}{a\times b\times(a+b)}:\frac{a\times(a+b)}{a\times b\times(a+b)}:\frac{a\times b}{a\times b\times(a+b)}$$

＝ｂ×（ａ＋ｂ）：ａ×（ａ＋ｂ）：ａ×ｂ

＝（ａ×ｂ＋ｂ×ｂ）：（ａ×ｂ＋ａ×ａ）：ａ×ｂ

１４４＝１２×１２なので，ａは１２の倍数で，ａ＋２３＝ｃという条件から，ａ＝１２，ｃ＝１２＋２３＝３５です。

（５）x：y：z＝（ａ×ｂ＋ｂ×ｂ）：（ａ×ｂ＋ａ×ａ）：ａ×ｂより，５６＝ｂ×ｂ－ａ×ａなので，差が５６である平方数の組を考えます。

よく知られているように，となりあう平方数の差の数列は連続する奇数の列になります。

平方数　１，４，９，１６，２５，…

差　３，５，７，９，…

よって，連続する奇数の和が５６となる場合を求めて，次の２つが答えとなります。

５６＝２７＋２９は１３×１３＝１６９と１５×１５＝２２５の差→ａ：ｂ：ｃ＝１３：１５：２８，

５６＝１１＋１３＋１５＋１７は５×５＝２５と９×９＝８１の差→ａ：ｂ：ｃ＝５：９：１４