受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

３目並べ・３・９手一重

　３目並べというゲームがあります。下の図のようなたて横３マスのマス目に先手は〇，後手は×を順に書いていき，たて・横・斜めのいずれかに〇が３つ続いて並べば先手の勝ち，×が３つ続いて並べば後手の勝ちとなってゲームは終わります。

　以下では，回転や裏返しによって重なる〇×の配置は同じものとします。よって，図１と２は同じ配置です。また，〇×を書く手順が回転や裏返しによって一致する場合は同じ手順とします。図３の３つの手順は５手目で同じ配置となって終わりますが，上段と中段の手順は異なる手順，上段と下段の手順は同じ手順です。必要であれば２枚目のマス目を利用して，以下の問いに答えなさい。

図１

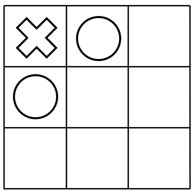


図２

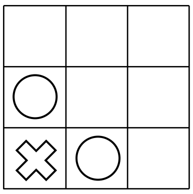
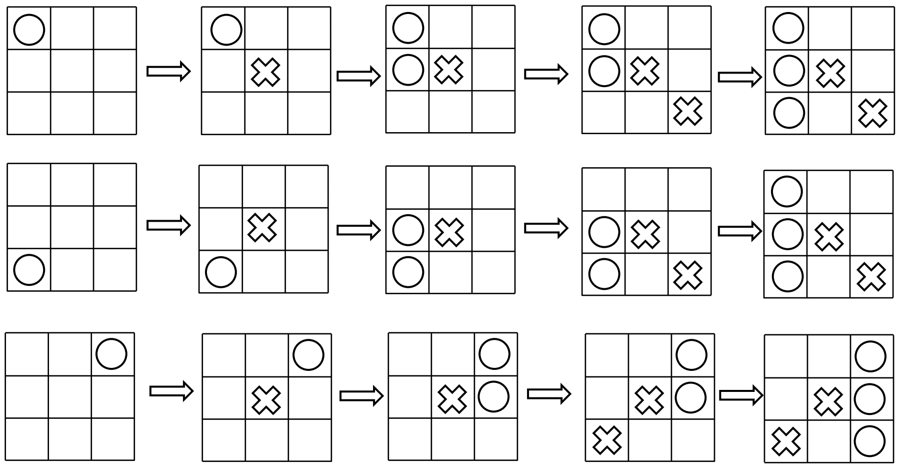


図３



（１）９手目に図４の配置になって，先手が勝ちました。このとき，
　〇×を書く手順は何通り考えられますか。

（２）９手目に図５の配置になって，先手が勝ちました。このとき，
　〇×を書く手順は何通り考えられますか。

図４

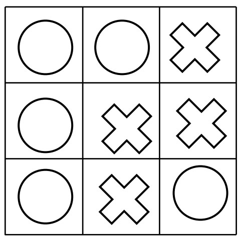


図５

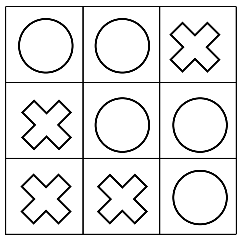


　図４，５では〇が３つ続いて並ぶ列が１列だけあります。このように，〇が３つ続いて並ぶ列が１列だけの状態で９手目に先手が勝った場合を，以下は考えます。

（３）９手目に先手が勝ったときの〇×の配置として考えられるものは何通りありますか。

（４）〇×を書く手順として考えられるものは何通りありますか。

最難関問題

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

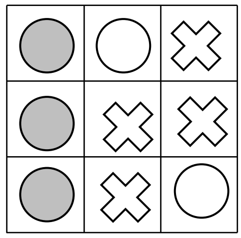
最難関問題

３目並べ・３・９手一重　（１）１７２８通り　（２）８６４通り　（３）６通り　（４）８６４０通り

（１）図４は○×の配置が対称ではありませんから，○を書く順番が異なれば異なる手順となります。途中で，図①のかげをつけた○が１列そろってしまうとゲームが終わってしまうので，影をつけた３つの○のうち１つは９手目に書かれなければいけません。

よって，９手目の○の選び方は３通り，１手目は残りの４通り，３手目は３通り，５手目は２通り，７手目は１通りとなるので，先手の手順は
３×４×３×２×１＝７２（通り）です。後手の手順は
４×３×２×１＝２４（通り）ですから，あわせて７２×２４＝１７２８（通り）です。

図①

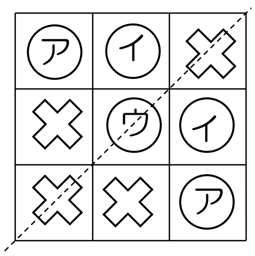


（２）図５は○の配置が図②の点線を軸とした線対称になっています。よって，１手目に先手がアのいずれか，イのいずれかの○を選んだ場合，以降の手順は重なります。

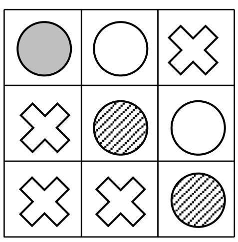
１手目にアを選んだ場合，図③のように１手目の○に影をつけると，残りの○×の配置の対称性は破れます。よって，以降は手順が重なることはありません。先手は９手目に斜線部分の○のどちらかを書くので，先手の手順は２×３×２×１＝１２（通り）です。後手の手順は４×３×２×１＝２４（通り）ですから，あわせて１２×２４＝２８８（通り）です。

１手目にイを選んだ場合，図④のように１手目の○に影をつけると，残りの○×の配置の対称性は破れます。よって，以降は手順が重なることはありません。先手は９手目に斜線部分の○のいずれかを書くので，先手の手順は３×３×２×１＝１８（通り）です。後手の手順は４×３×２×１＝２４（通り）ですから，あわせて１８×２４＝４３２（通り）です。

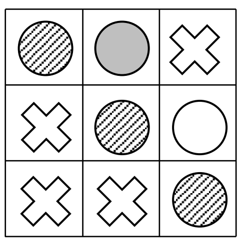
図②



図③



図④



最難関問題

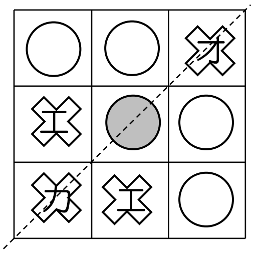
１手目にウを選んだ場合，図⑤のように１手目の○に影をつけると，残りの○×の配置は相変わらず線対称です。

２手目に後手がオを選ぶと，図⑥のようになって，なおも線対称ですから，アのいずれか，イのいずれかを３手目に先手が選んでも以降の手順は重なります。３手目に先手がアの一方を選んだ場合，図⑦のようになって残りの○×の配置の対称性が破れます。先手は９手目に斜線部分の○を選び，５手目には残りの○の一方を選ぶので，先手の手順は２通りです。後手の残りの手順は３×２×１＝６（通り）ですから，あわせて２×６＝１２（通り）です。

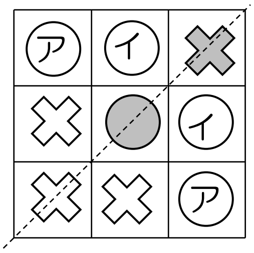
３手目に先手がイの一方を選んだ場合は，図⑧のようになって残りの○×の配置の対称性が破れます。先手は９手目に斜線部分の○を選び，５手目には残りの○の一方を選ぶので，先手の手順は２×２＝４（通り）です。後手の残りの手順は３×２×１＝６（通り）ですから，あわせて４×６＝２４（通り）です。

よって，２手目に後手がオを選んだ場合は１２＋２４＝３６（通り）となります。２手目に後手がカを選んだ場合も，同様に３６通りです。

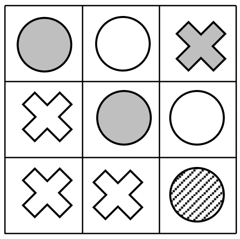
図⑤



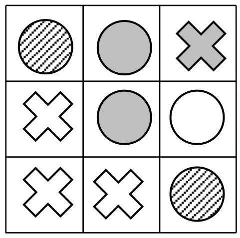
図⑥



図⑦

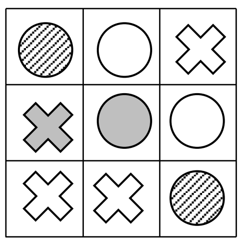


図⑧



２手目に後手がエの一方を選んだ場合，図⑨のように残りの○×の配置の対称性が破れるので，以降の手順は重なることはありません。先手は９手目に斜線部分の○を選ぶので，先手の手順は２×３×２×１＝１２（通り）です。後手の残りの手順は３×２×１＝６（通り）ですから，あわせて１２×６＝７２（通り）です。

図⑨

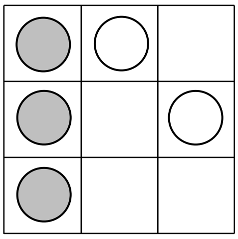


よって，１手目に先手がウを選んだ場合の手順は，３６×２＋７２＝１４４（通り）です。
以上をあわせて，２８８＋４３２＋１４４＝８６４（通り）です。

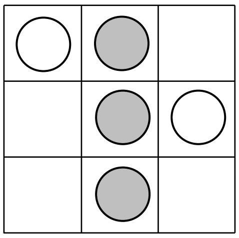
最難関問題

（３）回転や裏返しによる重複を考えると，（１）（２）に加えて以下の４通りがあるので，あわせて６通りです。

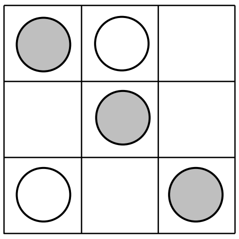
図⑩



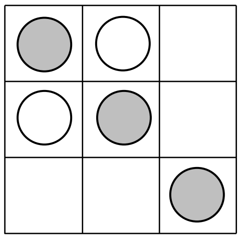
図⑪



図⑫



図⑬



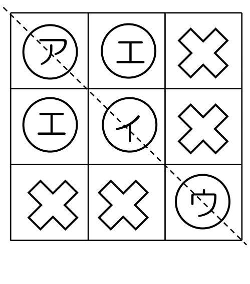
（４）図⑩，⑪，⑫は（１）と同様に〇×の配置は対称にならないので，それぞれ１７２８通りです。
図⑬に×を書き込むと図⑭のようになります。このとき，〇×の配置は線対称になります。

１手目がアの場合，図⑮のように残りの〇×の配置はなおも線対称ですから，２手目に後手がオのどちらか，カのどちらかの×を書いても，以降の手順は重なります。２手目に後手がオかカの×を書いた後は，残りの〇×の配置の対称性が破れるので，以降の手順を完全に重ねることはできません。よって，１手目が１通り，２手目が２通りです。３手目以降の先手は，９手目に斜線部分の〇のどちらかを書くので，２×３×２×１＝１２（通り）です。また，後手は３×２×１＝６（通り）ですから，２×６×１２＝１４４（通り）です。１手目がイ，ウの場合も同じく１４４通りです。

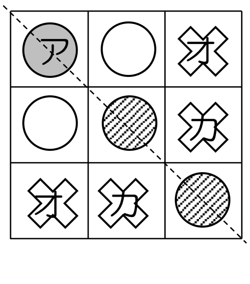
１手目がエのどちらかの場合，図⑯のように残りの〇×の配置の対称性は破れるので，以降の手順を完全に重ねることはできません。よって，２手目以降については，先手は９手目に斜線部分の〇のいずれかを書くので，３×３×２×１＝１８（通り），後手が４×３×２×１＝２４（通り）なので，１８×２４＝４３２（通り）です。

よって，図⑬の場合は１４４×３＋４３２＝８６４（通り）です。

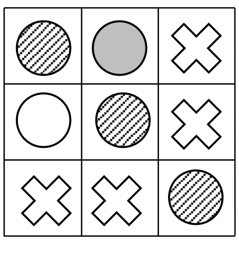
図⑭



図⑮



図⑯



以上より，１７２８×４＋８６４×２＝８６４０（通り）です。