

最難関問題

平均点と順位

30人のクラスでテストを行ったところ、平均点は50点でした。点数は0点から100点までの整数でつき、全員が異なる得点になりました。次の問いに答えなさい。

- (1) 1位の生徒の得点として考えられる最低点と最高点を答えなさい。また、30位の生徒の得点として考えられる最低点と最高点を答えなさい。
- (2) 15位の生徒の得点として考えられる最低点と最高点を答えなさい。また、16位の生徒の得点として考えられる最低点と最高点を答えなさい。
- (3) 位の生徒の得点として考えられる最高点は63点です。にあてはまる整数を答えなさい。
- (4) 位の生徒の得点が60点でした。このとき、10位の生徒の得点として考えられる最高点は88点です。にあてはまる整数を答えなさい。

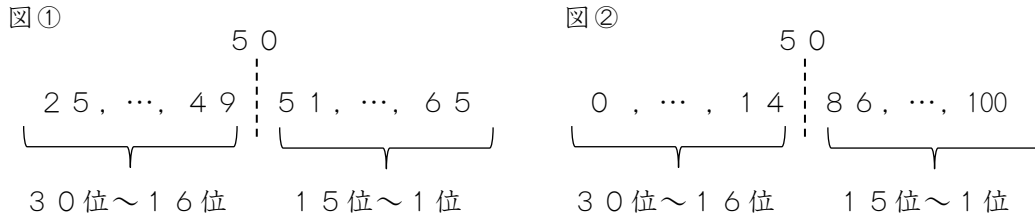


最難関問題

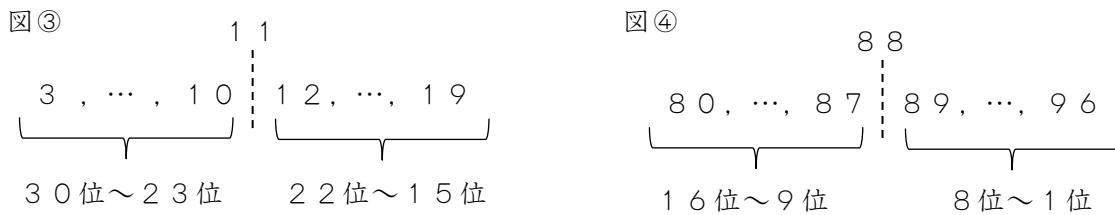
平均点と順位

- (1) 1位…最低点65点, 最高点100点 30位…最低点0点, 最高点25点
 (2) 15位…最低点20点, 最高点86点 16位…最低点14点, 最高点80点
 (3) 20 (4) 18

(1) 全員の点数ができるだけ近くなっている図①の場合を考えて, 1位の生徒の最低点は65点, 30位の生徒の最高点は25点です。また, 全員の点数ができるだけ離れている図②の場合を考えて, 1位の生徒の最高点は100点, 30位の生徒の最低点は0点です。



(2) 図②より, 15位の生徒の最高点は86点, 16位の生徒の最低点は14点です。
 15位の生徒の最低点を次に考えます。1位~14位の生徒の合計点は最も高い場合で, 100点~87点のときの, $(100 + 87) \times 14 \div 2 = 1309$ (点) です。このとき, $1500 - 1309 = 191$ (点) が15位~30位の生徒の合計点になります。15位の生徒の得点を低くするためには, この16人の生徒の得点が近づいている方がよいので, $191 \div 16 = 11$ 余り15より, 図③の場合を考えます。図③では16人の合計点が191点に15点足りないなので, 15人の得点を1点ずつ上げます。このとき, 15位の生徒の得点は必ず1点上げないとならないので, 15位の生徒の最低点は $19 + 1 = 20$ (点) です。
 16位の生徒の最高点は, 17位~30位の生徒の合計点が最も低い, 0点~13点のときの, $(0 + 13) \times 14 \div 2 = 91$ (点) の場合で考えます。このとき, $1500 - 91 = 1409$ (点) が1位~16位の生徒の合計点になります。 $1409 \div 16 = 88$ 余り1より, 図④では1点足りないなので, 9位か1位の生徒の得点を1点上げます。16位の生徒の最高点は80点です。



最難関問題

(3) (2) より16位の生徒の最高点が80点なので、それより下の順位の生徒について考えます。

16位の生徒の最高点

改めてまとめ直すと、 $1500 - (0 + 1 + \dots + 13) = 1409$ (点) が上位16人の合計点であり、上位16人が80点～95点をとっていたとすると $1409 - 1 - 8 = 1400$ (点) となるので、ここから9点上げることになりますが、16位の80点を1点上げると全員が1点上がって合計16点上がってしまうので、16位の生徒の最高点は80点となります。

17位の生徒の最高点

$1500 - (0 + 1 + \dots + 12) = 1409 + 13 = 1422$ (点) が上位17人の合計点であり、上位17人が79点～95点をとっていたとすると $1400 + 79 = 1479$ (点) となるので、ここから $1479 - 1422 = 57$ (点) 以上下げます。17人の得点を4点ずつ下げた、 $1479 - 17 \times 4 = 1411$ (点) のときに17位の生徒の得点は $79 - 4 = 75$ (点) で、17位の75点を1点上げると全員が1点上がって合計17点上がってしまうので、これが17位の生徒の最高点となります。

18位の生徒の最高点

$1422 + 12 = 1434$ (点) が上位18人の合計点であり、上位18人が74点～91点をとっていたとすると $1411 + 74 = 1485$ (点) となるので、ここから $1485 - 1434 = 51$ (点) 以上下げます。18人の得点を3点ずつ下げた、 $1485 - 18 \times 3 = 1431$ (点) のときに18位の生徒の得点は $74 - 3 = 71$ (点) で、18位の71点を1点上げると全員が1点上がって合計18点上がってしまうので、これが18位の生徒の最高点となります。

19位の生徒の最高点

$1434 + 11 = 1445$ (点) が上位19人の合計点であり、上位19人が70点～88点をとっていたとすると $1431 + 70 = 1501$ (点) となるので、ここから $1501 - 1445 = 56$ (点) 以上下げます。19人の得点を3点ずつ下げた、 $1501 - 19 \times 3 = 1444$ (点) のときに19位の生徒の得点は $70 - 3 = 67$ (点) で、19位の67点を1点上げると全員が1点上がって合計19点上がってしまうので、これが19位の生徒の最高点となります。

20位の生徒の最高点

$1445 + 10 = 1455$ (点) が上位20人の合計点であり、上位20人が66点～85点をとっていたとすると $1444 + 66 = 1510$ (点) となるので、ここから $1510 - 1455 = 55$ (点) 以上下げます。20人の得点を3点ずつ下げた、 $1510 - 20 \times 3 = 1450$ (点) のときに20位の生徒の得点は $66 - 3 = 63$ (点) で、20位の63点を1点上げると全員が1点上がって合計20点上がってしまうので、これが20位の生徒の最高点となります。

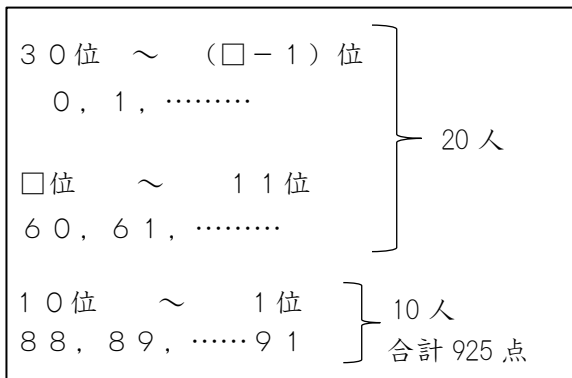
よって、最高点が63点である生徒は20位です。



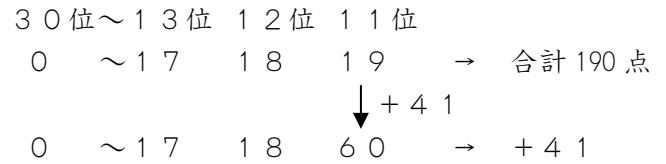
最難関問題

(4) □位の生徒が60点で、10位の生徒が最高点として88点になる場合は、図⑤のように考えられます。30位～11位までの20人が0点～19点をとったとすると、合計で $(0 + 19) \times 20 \div 2 = 190$ (点) になります。ここから60点以上の人数を増やして行って、 $1500 - (925 + 190) = 385$ (点) 点数を上げます。図⑥のように11位の人が60点の場合は、 $60 - 19 = 41$ より、 $41 \times 1 = 41$ (点) 上がります。図⑦のように12位の人が60点の場合は、 $60 - 18 = 42$ より、 $42 \times 2 = 84$ (点) 上がります。

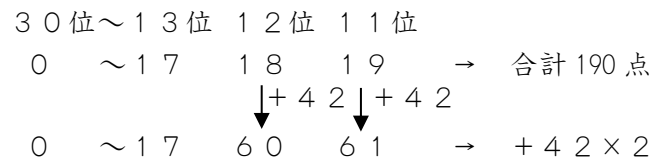
図⑤



図⑥



図⑦



以降も同様に、点数は (43×3) 点、 (44×4) 点、 (45×5) 点、 (46×6) 点、と上がっていき、17位の生徒が60点の場合の $47 \times 7 = 329$ (点)、18位の生徒が60点の場合の $48 \times 8 = 384$ (点) となります。17位の生徒が60点の場合は、 $385 - 329 = 56$ (点) より、10位～1位の生徒の得点を全員上げることができてしまうので、条件を満たしません。18位の生徒が60点の場合は、あと $385 - 384 = 1$ (点) 上げることが必要ですが、10位の生徒の得点を挙げると10位～1位までの生徒の得点を全員上げることになってしまうので、1位の生徒や11位の生徒の得点などを1点上げることになり、10位の生徒の最高点は88点となります。

よって、60点をとった生徒は18位です。