

数字の長方形のパズル

図1・2のマス目では、長方形（正方形）の辺の上に3や1のように同じ数字が3個あり、数字と数字の間の辺が通るマスの数が、その数字と同じになっています。ただし、辺が通るマスの数は、数字と数字の間の最短経路のマスの数でなければなりません。図3の場合、かげをつけた2つのマスの間の最短経路は1マスなので、このような長方形は考えません。

このきまりにしたがって、図4のように、○異なる数字の長方形を、○辺と辺が重ならないように、かきこみます。

以下の問いに答えなさい。必要であれば、2枚目のマス目を利用してかまいません。

図1 3マス

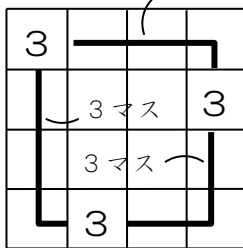


図2 1マス

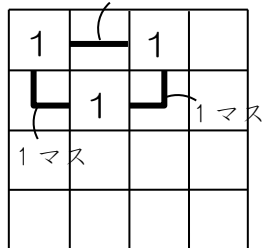


図3

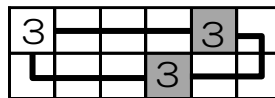
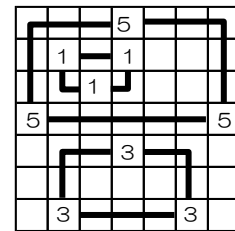
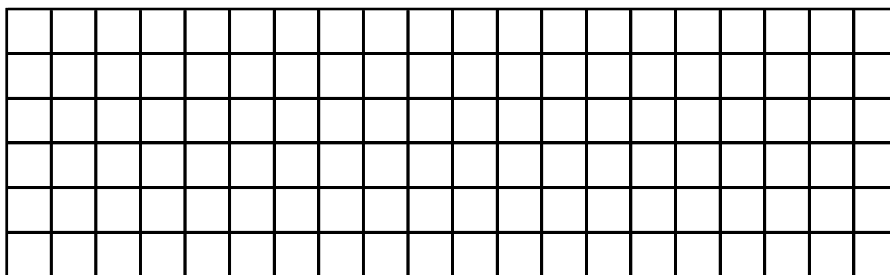


図4



- (1) 縦<sup>たて</sup>6マス、横20マスのマス目に、数字の長方形は最も多くて何個入りますか。



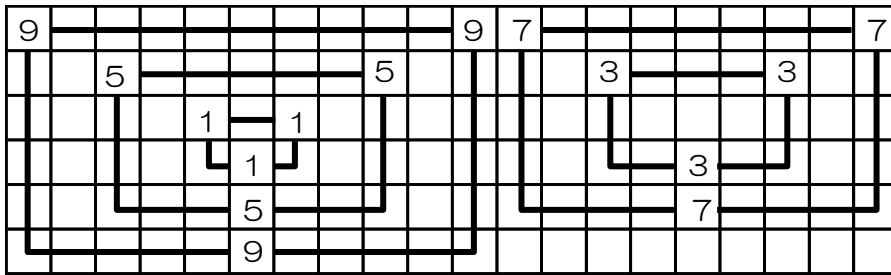
- (2) 縦150マス、横301マスのマス目に、数字の長方形は最も多くて何個入りますか。

Die Grundlagen  
der Arithmetik  
für die Aufnahmeprüfung

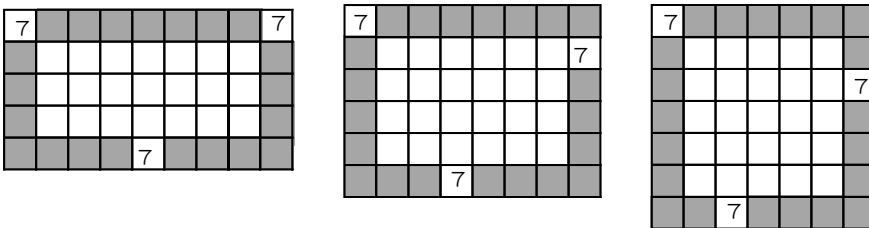


数字の長方形のパズル (1) 5個 (2) 100個

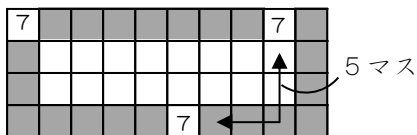
(1) 下の図のような, 1, 3, 5, 7, 9の5個の長方形が最多の場合です。



(2) 7の長方形(正方形)を例にとると, 以下の3通りがあります。長方形の辺上に並ぶマスの個数は, いずれの場合も  $(7 + 1) \times 3 = 24$  (マス) です。



この3通りの長方形は,  $(24 + 4) \div 2 = 14$  より, 縦横に並ぶ長方形の個数の和が14になっています。ただし, 縦4マス横10マスの場合は次の図のように, 7の数字の間が5マスになってしまいます。よって, 横に並ぶマスの個数は,  $7 + 2 = 9$  (マス) までとなります。



また, 以上のことから, 偶数の数字の長方形は作れないことがわかります。例えば数字の4の場合, 辺上に並ぶマスの個数は,  $(4 + 1) \times 3 = 15$  という奇数なので, 長方形になりません。



最難関問題

奇数の数字の長方形の（縦，横）のマス個数を整理すると，次のようになります。

- |                             |   |
|-----------------------------|---|
| 1… (2, 3)                   | 3… (3, 5), (4, 4)                       |
| 5… (4, 7), (5, 6)           | 7… (5, 9), (6, 8), (7, 7)               |
| 9… (6, 11), (7, 10), (8, 9) | 11… (7, 13), (8, 12), (9, 11), (10, 10) |
| …                           | …                                       |

ここで，長方形の内側に長方形が入る条件を考えます。たとえば数字の9の長方形は（6，11），（7，10），（8，9）なので，その内側に入る長方形の大きさは縦横ともに2マス小さくなるので，（4，9），（5，8），（6，7）ですから，数字の5以下の長方形が条件をみたし，7の長方形は内側に入ることはできません。このように， $1 < 5 < 9 < \dots$ ， $3 < 7 < 11 < \dots$ で長方形は内側に入ることができません。

では，縦150マス，横301マスのマス目の場合，どのような入れ方で長方形は最多になるでしょうか。このマス目に入る最も大きい長方形は， $(150 + 301) \times 2 - 4 = 898$ ， $898 \div 3 = 299$ 余り1となるので， $299 - 1 = 298$ より，297の長方形が入ります。ここから，297，293，289，…，5，1の長方形を入れた場合，75個の長方形が入ります。

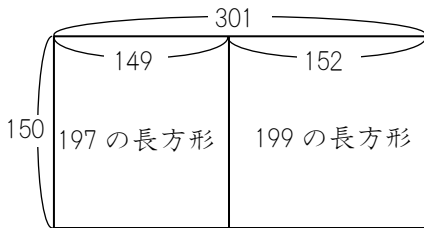
他方で，（1）の1<5と3のように2つの系列に分けて長方形を入れていった場合，おおむね縦横ともに150マスの長方形を考えます。 $(150 + 150) \times 2 - 4 = 596$ ， $596 \div 3 = 198$ 余り2より，197および199の長方形を考えます。

$(197 + 1) \times 3 = 594$ ， $(594 + 4) \div 2 = 299$ ， $299 = 149 + 150$ より，縦150マス横149マスの長方形ができ，

$(199 + 1) \times 3 = 600$ ， $(600 + 4) \div 2 = 302$ ，

$302 = 151 + 151 = 150 + 152$ より，縦150マス横152マスの長方形ができます。

この2つをあわせると，ちょうど縦150マス，横301マスのマス目をうめることができます。



1から199までの奇数の数字の長方形が入るので，100個です。