受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

連続する整数への分解の最多数

整数１５を連続する整数の和に分解する方法は，１＋２＋３＋４＋５，４＋５＋６，７＋８の３通りがあります。このとき，最も多くの連続する整数の和に分解すると，１～５の５個の整数に分解できます。以下の問いに答えなさい。

（１）２０２５を連続する整数の和に分解する方法は$\boxed{\text{ア}}$通りあります。また，最も多くの連続する整数の和に分解すると，$\boxed{\text{イ}}$個の整数に分解できます。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$にあてはまる数を答えなさい。

（２）連続する整数の和に分解する方法が，（１）の$\boxed{\text{ア}}$通りある整数を小さい順に３つ答えなさい。また，それぞれについて，最も多くの連続する整数の和に分解すると，何個の整数に分解できますか。

（３）４８０００００を最も多くの連続する整数の和に分解すると，何個の整数に分解できますか。

最難関問題

連続する整数への分解の最多数

（１）$\boxed{\text{ア}}$＝１４，$\boxed{\text{イ}}$＝５４

（２）２０２５が５４個，３９６９が８１個，４０５０が８１個

（３）３０７２個

（１）整数は，１以外の奇数の約数に対応して，連続する整数の和に分解できます。２０２５の場合は，

４５×４５→４５を平均とする４５個の連続する整数に分解して，２３＋…＋６７

２７×７５→７５を平均とする２７個の連続する整数に分解して，６２＋…＋８８，

２７を平均とする７５個の連続する整数だと０未満になってしまうので，

２７×７５＝５４×３７.５より，３７.５を平均とする５４個の連続する整数に分解して，

１１＋…＋６４

２５×８１→２５個および５０個の連続する整数に分解可能

１５×１３５→１５個および３０個の連続する整数に分解可能

９×２２５→９個および１８個の連続する整数に分解可能

５×４０５→５個および１０個の連続する整数に分解可能

３×６７５→３個および６個の連続する整数に分解可能

１×２０２５→２個の連続する整数に分解可能

以上より，$\boxed{\text{ア}}$＝１４で，$\boxed{\text{イ}}$は１１＋…＋６４のときの５４です。

（２）（１）の$\boxed{\text{ア}}$＝１４は，２０２５の１以外の奇数約数が１４個あるためでした。１を含めた奇数約数は１５個あるということから，素因数分解に現れる２以外の素数の組みあわせで１５個の約数を作れる整数を考えます。条件を満たすのは，○および□を２以外の素数として，

$$\underbrace{\text{○}\times\cdots\times\text{○}}_{\text{１４個}}\ \text{か}\ \underbrace{\text{○}\times\cdots\times\text{○}}_{\text{２個}}\times\underbrace{\text{□}\times\cdots\times\text{□}}_{\text{４個}}$$

の形になる場合です。よって，小さい順に，

３×３×３×３×５×５＝２０２５，

３×３×３×３×７×７＝３９６９，

２×３×３×３×３×５×５＝４０５０，となります。

最難関問題

（１）と同様に調べていくと，３９６９の場合は次のようになります。

６３×６３→６３を平均とする６３個の連続する整数に分解して，３２＋…＋９４

４９×８１→４９を平均とする８１個の連続する整数に分解して，９＋…＋８９，

８１を平均とする４９個の連続する整数に分解して，５７＋…＋１０５

２７×１４７→１４７を平均とする２７個の連続する整数に分解して，１３４＋…＋１６０，

２７を平均とする１４７個の連続する整数だと０未満になってしまうので，

２７×１４７＝５４×７３.５より，７３.５を平均とする５４個の連続する整数に分解して，４７＋…＋１００

以降で８１個より多い場合は現れないので，８１個です。

４０５０の場合も同様に調べていくと，５０×８１のときの８１個，となります。

（３）（１）と（２）のように，もとの整数をｎ×ｍ（ｎ≦ｍ）の形で表して，ｎとｍができるだけ近い数の場合から順に調べていくと，途中でｎを平均とするｍ個の整数に分解できなくなり，以降はｎ個や（ｎ×２）個に分解されるようになります。このときの条件は，ｎが$\frac{m}{2}$未満になることです。（２）の３９６９であれば，２７×１４７以降は，小さいほうの数＝２７以下の数の２倍，つまり５４個以下にしか分解されなくなるので，８１個の分解が最多となります。よって，ｎが「ぎりぎりで」$\frac{m}{2}$未満となるような，ｎ×ｍに注目することが鍵となります。

さて，４８０００００を素因数分解すると，

$4800000=\underbrace{2\times\cdots\times2}_{9個}\times3\times\underbrace{5\times\cdots\times5}_{5個}$　となります。

連続する整数の分解は奇数約数に対応するので，

$4800000=(\underbrace{2\times\cdots\times2}_{9個}\times○)\times(□)=(512\times○)\times(□)$という，

偶数×奇数の形を考えます。すると，５１２×３＝１５３６と，５×５×５×５×５＝３１２５の組み合わせにおいて，１５３６が３１２５÷２を少しだけ下回る数になっています。このときは，１５３６×２＝３０７２（個）の連続する整数の和に分解できます。

ｎとｍの差がより小さく，一方が奇数となる組み合わせを考えると，

５１２×５＝２５６０と３×５×５×５×５＝１８７５→１８７５個に分解，

となるので，３０７２個が最多です。