

## 最難関問題

### 長さ と 速さ ・ 3

ある鉄道模型では、列車の一両の長さが10cmで、車両をつないで線路の上を走らせることができます。列車の速さは、1両編成のときは毎秒12cm、2両編成のときは毎秒6cm、3両編成のときは毎秒4cm、…というように、車両の数が増えるにつれて遅くなっていき、 $\square$ 両編成で秒速 $\bigcirc$ cmのときに $\square \times \bigcirc = 12$ になります。この模型について、以下の問いに答えなさい。ただし、車両と車両の連結部分の長さは考えません。

(1) 列車AとBが向かいあって走っているとき、すれ違い始めてからすれ違い終わるまでに10秒かかりました。また、同じ方向に進んでいるとき、列車Aの先頭部分が列車Bの最後尾に追いついてから完全に追いこすまでに20秒かかりました。列車Aは何両編成ですか。

(2)  $\square$ 両編成の列車Aと $\triangle$ 両編成の列車Bが同じ方向に進んでいるとき、列車Aの先頭部分が列車Bの最後尾に追いついてから完全に追いこすまでに50秒かかりました。

①  $(\square + \triangle) : \left(\frac{1}{\square} - \frac{1}{\triangle}\right)$  を、最も簡単な整数の比で答えなさい。

② 列車AとBは何両編成ですか。考えられる組み合わせを、(1, 2), (3, 4) のようにすべて答えなさい。

## 最難関問題

長さ×速度・3 (1) 2両編成 (2) ①60:1 ②(3, 5), (3, 12)

(1) 列車AとBがすれ違うときと追いつくときにかかる時間の比は  $10:20=1:2$ 、列車AとBの  
(速さの和):(速さの差) =  $2:1$  です。よって、列車AとBの速さの比は、  
 $(2+1) \div 2 : (2-1) \div 2 = 3:1$  です。列車の速さと車両数は反比例するので、AとBの車両  
数の比は  $1:3$  です。列車Aを  $\square$  両編成とすると、Bは  $(\square \times 3)$  両編成なので、列車Aの速さは  
毎秒  $\frac{12}{\square}$  cm、列車Bの速さは  $\frac{12}{\square \times 3} = \frac{4}{\square}$  より、毎秒  $\frac{4}{\square}$  cm です。列車AとBが10秒ですれ違うというこ  
とから、 $(\square + \square \times 3) \times 10 = (\frac{12}{\square} + \frac{4}{\square}) \times 10$  より、 $\square \times 4 = \frac{16}{\square}$ 、 $\square = \frac{4}{\square}$ 、となるので、  
 $\square \times \square = 4$  より、 $\square = 2$  ですから、列車Aは2両編成です。

(2)

① 列車Aを  $\square$  両編成、Bを  $\triangle$  両編成とすると、50秒で列車AがBを追いつくので、

$$(\square + \triangle) \times 10 = (\frac{12}{\square} - \frac{12}{\triangle}) \times 50 \text{ です。} (\square + \triangle) \times 10 = (\frac{1}{\square} - \frac{1}{\triangle}) \times 600,$$

$$\square + \triangle = (\frac{1}{\square} - \frac{1}{\triangle}) \times 60 \text{ となるので、} (\square + \triangle) : (\frac{1}{\square} - \frac{1}{\triangle}) = 60 : 1 \text{ です。}$$

最難関問題

②  $\square + \Delta = \left(\frac{1}{\square} - \frac{1}{\Delta}\right) \times 60$  より,  $\square + \Delta = \frac{60}{\square} - \frac{60}{\Delta}$ ,  $\frac{60}{\square} - \square = \frac{60}{\Delta} + \Delta$  です。この式から,  
 $\frac{60}{\square}$  は  $\square$  よりも大きいといえるので,  $7 \times 7 = 49$ ,  $8 \times 8 = 64$  であることから,  $\square$  は 7 以下です。

また, 列車 B は列車 A より遅いので, 車両数は列車 A より多くなります。

$\square = 7$  のとき,  $\frac{60}{7} - 7 = \frac{11}{7} = \frac{60}{\Delta} + \Delta$  となりますが,  $\Delta$  は 8 以上なので, 式を満たす  $\Delta$  はありません。

$\square = 6$  のとき,  $\frac{60}{6} - 6 = 4 = \frac{60}{\Delta} + \Delta$  となりますが,  $\Delta$  は 7 以上なので, 式を満たす  $\Delta$  はありません。

$\square = 5$  のとき,  $\frac{60}{5} - 5 = 7 = \frac{60}{\Delta} + \Delta$  となります。6 以上で式を満たす可能性がある  $\Delta$  は 6 ですが,  $\frac{60}{6} + 6 = 16$  なので, 式を満たすことはできません。

$\square = 4$  のとき,  $\frac{60}{4} - 4 = 11 = \frac{60}{\Delta} + \Delta$  となります。5 以上で式を満たす可能性がある  $\Delta$  は 5 ~ 10 のうちで 60 の約数である 5, 6, 10 ですが,  $\frac{60}{5} + 5 = 17$ ,  $\frac{60}{6} + 6 = 16$ ,  $\frac{60}{10} + 10 = 16$  なので, 式を満たすことはできません。

$\square = 3$  のとき,  $\frac{60}{3} - 3 = 17 = \frac{60}{\Delta} + \Delta$  となります。4 以上で式を満たす可能性がある  $\Delta$  は 4 ~ 16 のうちで 60 の約数である 4, 5, 6, 10, 12, 15 です。 $\frac{60}{4} + 4 = 19$ ,  
 $\frac{60}{5} + 5 = 17$ ,  $\frac{60}{6} + 6 = 16$ ,  $\frac{60}{10} + 10 = 16$ ,  $\frac{60}{12} + 12 = 17$ ,  $\frac{60}{15} + 15 = 19$  なので,  
式を満たす  $\Delta$  は 5 と 12 です。よって, (3, 5), (3, 12) です。

$\square = 2$  のとき,  $\frac{60}{2} - 2 = 28 = \frac{60}{\Delta} + \Delta$  となります。3 以上で式を満たす可能性がある  $\Delta$  は 3 ~ 27 のうちで 60 の約数である 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 です。 $\frac{60}{3} + 3 = 23$ ,  
 $\frac{60}{20} + 20 = 23$  であり,  $\Delta = 4, 5, 6, 10, 12, 15$  のときも,  $\frac{60}{\Delta} + \Delta$  は 28 にならなかった  
ので, 式を満たすことはできません。以上より, (3, 5), (3, 12) です。