受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

近さの範囲・正八面体

この問題では，三角定規とコンパスを使います。作図においては，三角定規の直角を利用しても構いません。

図１の立体は，すべての面が１辺２㎝の正三角形でできている，正八面体です。以下の問いに答えなさい。

図１

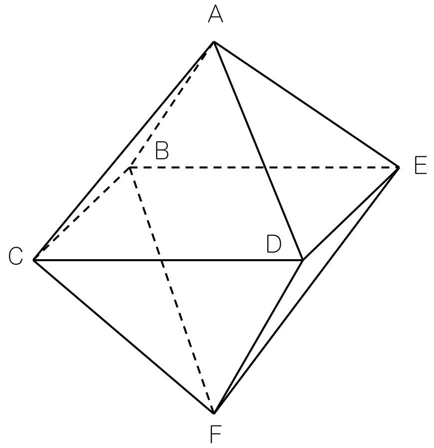


図２

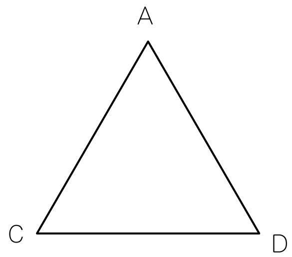
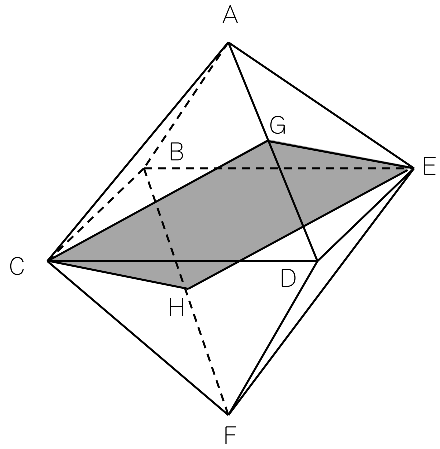


図３

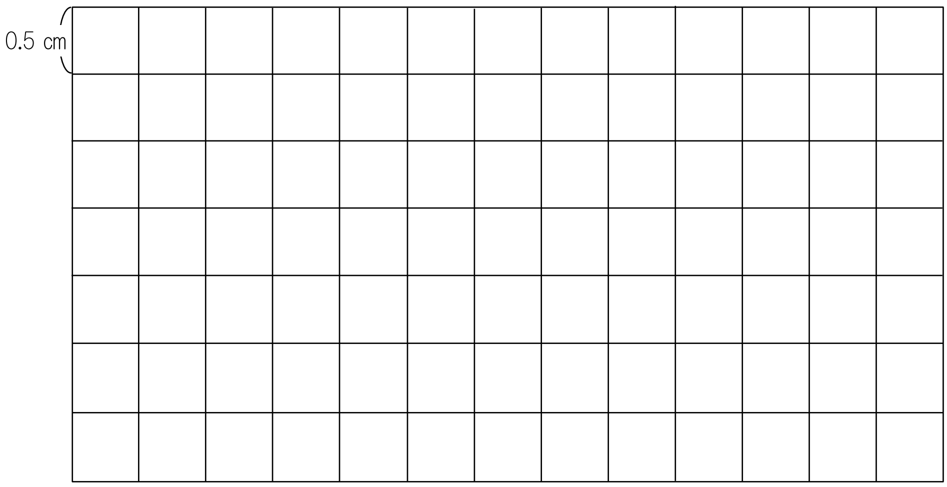


（１）正三角形ＡＣＤにおいて，３つの頂点のうちで最も近い頂点がＤである部分を図２に作図し，斜線で示しなさい。

（２）正八面体ＡＢＣＤＥＦにおいて，６つの頂点のうちで最も近い頂点がＤである部分を，立体Ｘとよびます。図３のように，辺ＡＤの中点をＧ，ＢＦの中点をＨとし，正三角形ＡＣＤの面積を△，四角形ＣＨＥＧの面積を□とします。立体Ｘの表面積を，△や□を用いた式で表しなさい。

（３）立体Ｘの面を１つずつ図４に作図し，斜線で示しなさい。ただし，合同な面は１つ作図すればよいものとします。

図４



受験算数の基礎

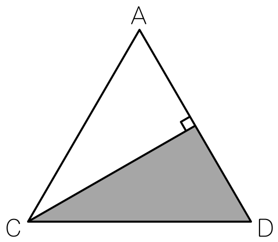
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

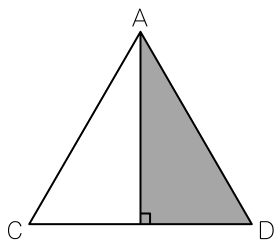
近さの範囲・正八面体　（１）解説の図③参照　（２）$\triangle\times\frac{4}{3}+\square\times\frac{2}{3}$　（３）解説参照

（１）頂点ＡとＤを比べると，Ｄに近いのは図①のかげをつけた部分になります。頂点ＣとＤでは図②のようになります。よって，三角定規の直角を利用して，頂点Ａ，Ｃ，Ｄから向かい合う辺に垂直な線を２本引いてできる図③の斜線部分が答えとなります。

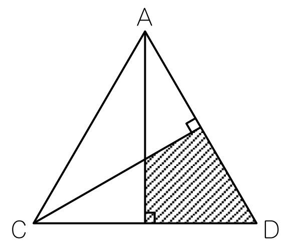
図①



図②

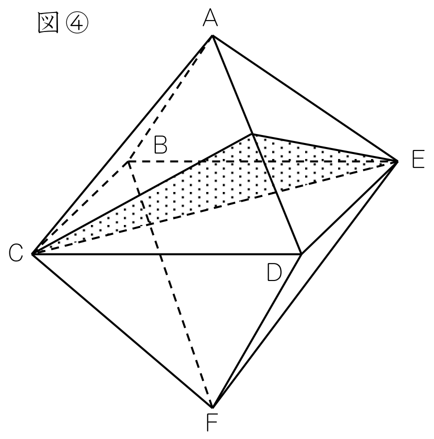


図③

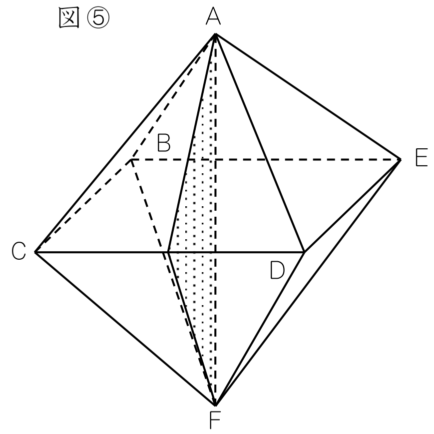


（２）Ｄと，正反対の頂点のＢを比べると，Ｄに近いのは手前の四角すいＤ－ＡＣＦＥです。四角すいＤ－ＡＣＦＥのうちで，頂点Ａに近い部分とＤに近い部分の境界は図④の三角形です。同様に，頂点Ｃに近い部分とＤに近い部分の境界は図⑤の三角形です。頂点Ｆ，Ｅについても同様のことを考えていくと，図⑥の太線で囲んだ部分が立体Ｘです。

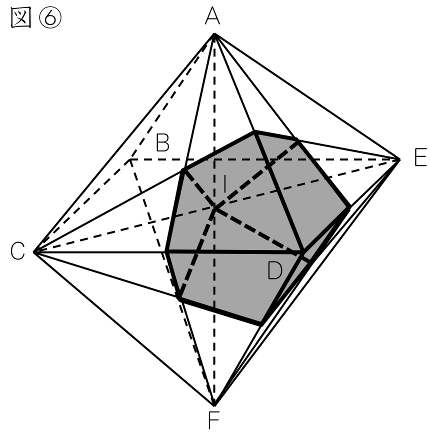
図④



図⑤



図⑥



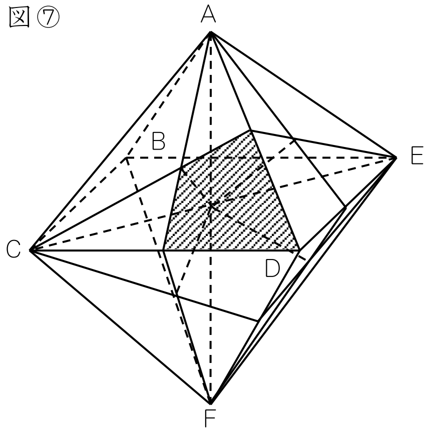
最難関問題

立体Ｘは，図⑦の斜線部と合同な四角形４つと，図⑧の斜線部と合同な四角形４つから成る八面体です。図⑦の四角形は，正三角形ＡＣＤの$\frac{1}{3}$倍の面積なので，４つで，△×$\frac{1}{3}$×４＝△×$\frac{4}{3}$です。ここで，正三角形ＡＣＤにおいて点Ｉを図⑧のようにきめると，図⑨の三角形の相似より，

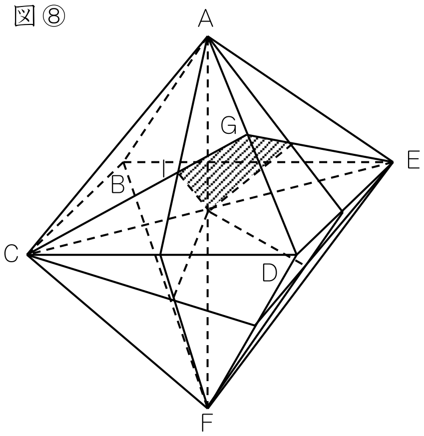
ＣＩ：ＩＧ＝２：１となります。よって，図⑧の四角形の面積は，図⑩のように三角形ＧＣＥの$\frac{1}{3}$倍，

四角形ＣＨＥＧの$\frac{1}{6}$倍の面積なので，４つで，□×$\frac{1}{6}$×４＝□×$\frac{2}{3}$です。

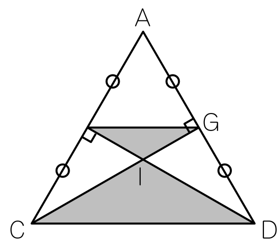
図⑦



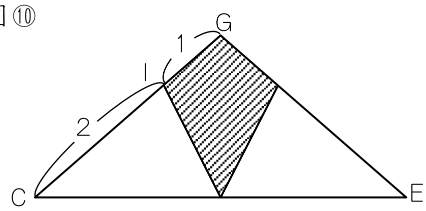
図⑧



図⑨



図⑩



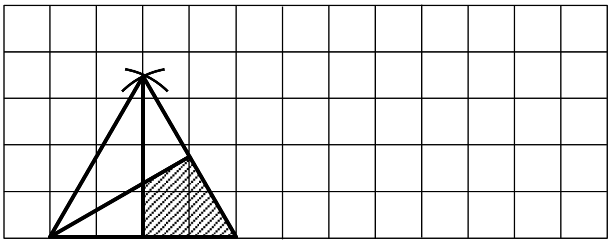
以上より，△×$\frac{4}{3}$＋□×$\frac{2}{3}$です。

最難関問題

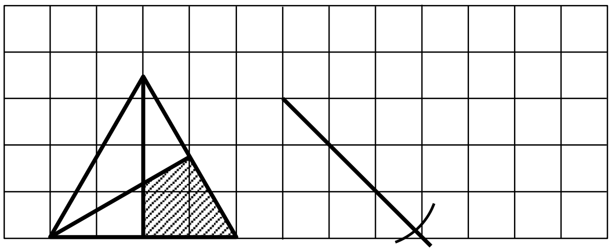
（３）解答例は次のようになります。図⑪のように，コンパスを用いて１辺２㎝の正三角形をかき，三角定規の直角を利用して線を２本引くと，（２）の図⑦の面を作図できます。

続いて，図⑧の面の作図を考えます。三角形ＣＤＥの辺ＣＥは１辺が２㎝の正方形の対角線の長さです。そこで，図⑫のようにマス目の対角線の向きに直線を引き，コンパスで２㎝の長さをはかります。

図⑪

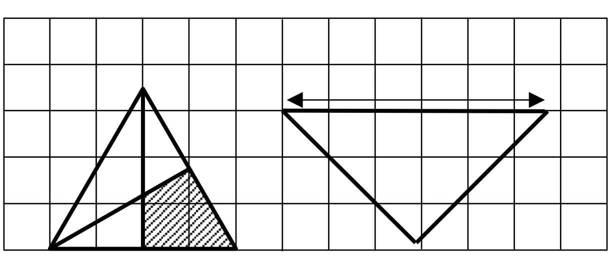


図⑫

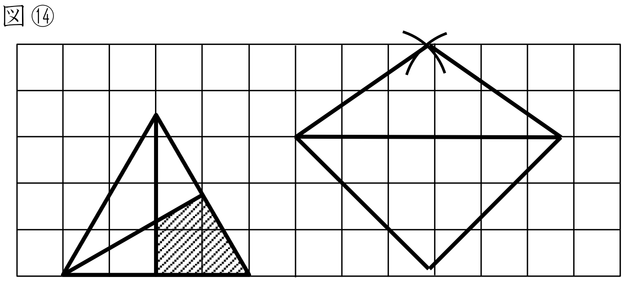


三角定規の直角を利用して，図⑬のように直角二等辺三角形をかきます。←→の長さは１辺２㎝の正方形の対角線の長さに等しいので，図⑧や⑩のＣＥの長さと同じになります。次に頂点Ｇを作図します。辺ＣＧ，ＥＧの長さが１辺２㎝の正三角形の高さにあたることを利用すると，コンパスで１辺２㎝の正三角形の高さと等しい長さをとって，図⑭のように二等辺三角形を作図できます。

図⑬



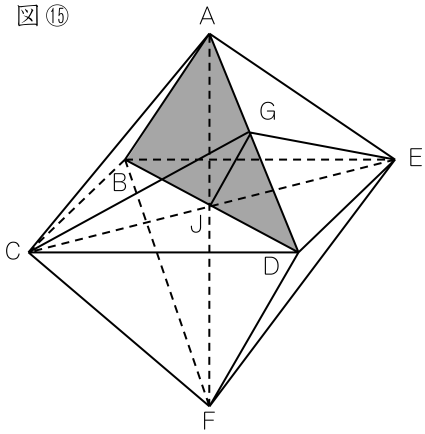
図⑭



頂点Ｇを作図する別の方法として，三角形ＣＥＧの高さを利用することもできます。図⑮において三角形ＡＢＤとＧＪＤはどちらも直角二等辺三角形で，２：１の相似形です。

よって，（ＧＪの長さ）＝（三角形ＣＥＧの高さ）は１㎝です。

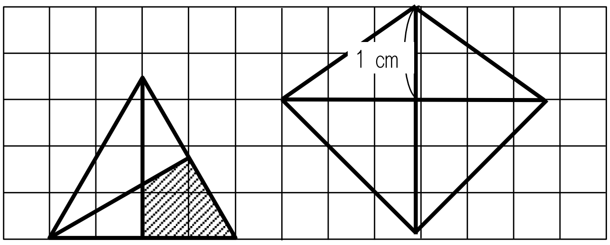
図⑮



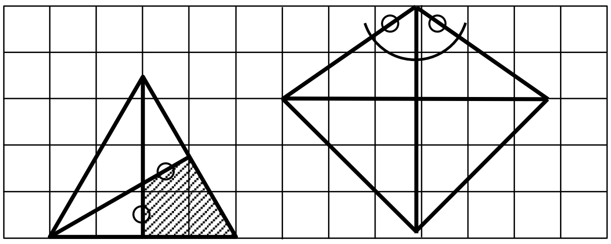
最難関問題

図⑯のように三角定規の直角を利用して垂直な線を引き，１cmのばすと，三角形ＣＥＧと合同な三角形を作図できます。図⑰のようにコンパスで同じ長さをとることで，図⑱のように，図⑧の面が作図できます。

図⑯



図⑰



図⑱