

フィボナッチ平方数の和

次の式を計算しなさい。

(1)

$$8 \times 8 + 13 \times 13 + 21 \times 21 + 34 \times 34 + 55 \times 55 + 89 \times 89 + 144 \times 144 \\ + 233 \times 233 + 377 \times 377 + 610 \times 610 + 987 \times 987 + 1597 \times 1597$$

(2)

$$11 \times 11 + 7 \times 7 + 18 \times 18 + 25 \times 25 + 43 \times 43 + 68 \times 68 + 111 \times 111 \\ + 179 \times 179 + 290 \times 290 + 469 \times 469 + 759 \times 759 + 1228 \times 1228$$



最難関問題

(1) 4 1 2 6 5 4 4 (2) 2 4 4 0 0 8 0

(1) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...というフィボナッチ数列の8以降の数を2個かけてできる平方数の和を求める式である点に注目します。図①は1辺の長さがフィボナッチ数になっている正方形の敷きつめ方を表しています。図①では7個の正方形を敷きつめることで、たて13, 横21の長方形ができていますので, $1 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times 5 + 8 \times 8 + 13 \times 13 = 13 \times 21$

が成り立っています。

よって,

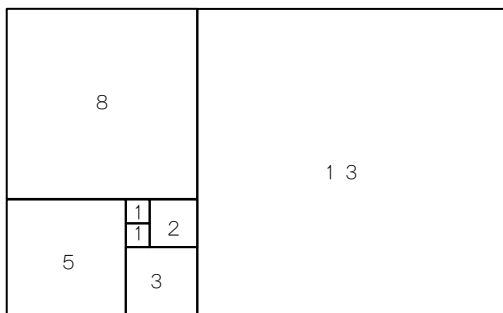
$$\begin{aligned} & 8 \times 8 + 13 \times 13 + \dots + 987 \times 987 + 1597 \times 1597 \\ &= 1 \times 1 + 1 \times 1 + \dots + 987 \times 987 + 1597 \times 1597 - (1 \times 1 + 1 \times 1 + \dots + 8 \times 8) \\ &= 1597 \times (987 + 1597) - 8 \times 13 \\ &= 4126557 \end{aligned}$$

です。

(2) 同様に, 正方形を組み合わせて長方形を作ると, 図②のような「ほぼ長方形」ができます。図②であれば, かげをつけた部分が $11 \times 4 = 44$ なので, $44 + 111 \times 179$ を計算することで答えを求めることができます。

よって, $44 + 1228 \times (759 + 1228) = 2440080$ です。

図①



図②

