受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

２つの連続する三角数の平方数の和と平方数番目の三角数

太郎「４５×４５を計算すると２０２５になるから，２０２５は同じ数２つの積で，４５番目の平方数だ。」

花子「ということは，図１のように１辺４５㎝の正方形の面積と同じだね。他にも４５×４５を表す方法はないかな…」

太郎「う～ん…，１＋２＋３＋４＋５＋６＋７＋８＋９＝４５だから，４５は９番目の三角数だね。三角数は図２のような階段形で表すことができるよ。」

花子「とすると４５×４５は図２の階段形が４５個と考えることができそうだけど，かききれないから３番目の三角数の１＋２＋３＝６が６個の場合を考えてみよう。」

太郎「図３の階段形を６個…色々な並べ方がありそうだけど…」

花子「階段形に並べたらどうかな。図４のようになるね。」

図１

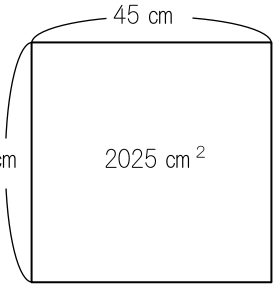

図２

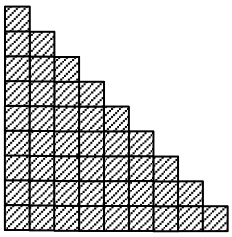

図３

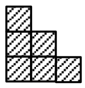

図４

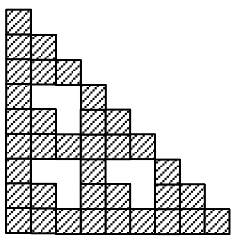

図４の並べ方から，同じ三角数２個の積である平方数についてある性質が成り立つことがわかります。それは，どのような性質ですか。簡潔に答えなさい。必要であれば２枚目のマス目を使って考えなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

２つの連続する三角数の平方数の和と平方数番目の三角数　解説参照

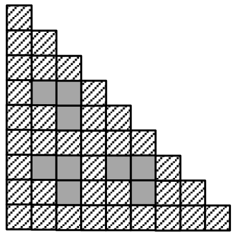

図４の空いている部分を埋めると，右図のようになります。空いている部分も階段形であり，２番目の三角数である１＋２＝３が３個です。また，図形全体は９番目の三角数である４５になっています。つまり，２番目の三角数の３，３番目の三角数の６，９番目の三角数の４５について，３×３＋６×６＝４５が成り立っています。

一応他の三角数の場合もみてみると，

三角数	１，	３，	６，	１０，	１５，	２１，	２８，	３６，	４５，…
三角数の平方数	１，	９，	３６，	１００，	２２５，	４４１，	７８４，	１２９６，	２０２５，…

においてとなりあう三角数の平方数の和を求めると，

１番目と２番目の三角数の平方数の和，１＋９＝１０は４番目の三角数，

２番目と３番目の三角数の平方数の和，９＋３６＝４５は９番目の三角数，

３番目と４番目の三角数の平方数の和，３６＋１００＝１３６は１６番目の三角数，

４番目と５番目の三角数の平方数の和，１００＋２２５＝３２５は２５番目の三角数，…となります。

このように，□－１番目の三角数と□番目の三角数を並べると，□×□番目の三角数になるので，

（□－１番目の三角数）×（□－１番目の三角数）＋（□番目の三角数）×（□番目の三角数）
＝（□×□番目の三角数）

ということが言えていれば正解となります。