



最難関問題

もくなら
3目並べ・2・8手

3目並べというゲームがあります。下の図のようなたて横3マスのマス目に先手は○，後手は×を順に書いていき，たて・横・斜めのいずれかに○が3つ続いて並べば先手の勝ち，×が3つ続いて並べば後手の勝ちとなってゲームは終わります。

以下では，回転や裏返しによって重なる○×の配置は同じものとしします。よって，図1と2は同じ配置です。また，○×を書く手順が回転や裏返しによって一致する場合は同じ手順としします。図3の3つの手順は5手目で同じ配置となって終わりますが，上段と中段の手順は異なる手順，上段と下段の手順は同じ手順です。必要であれば2枚目のマス目を利用して，以下の問いに答えなさい。

図1

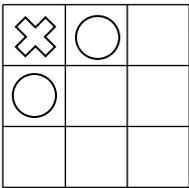


図2

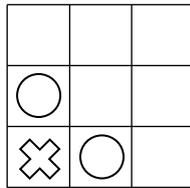
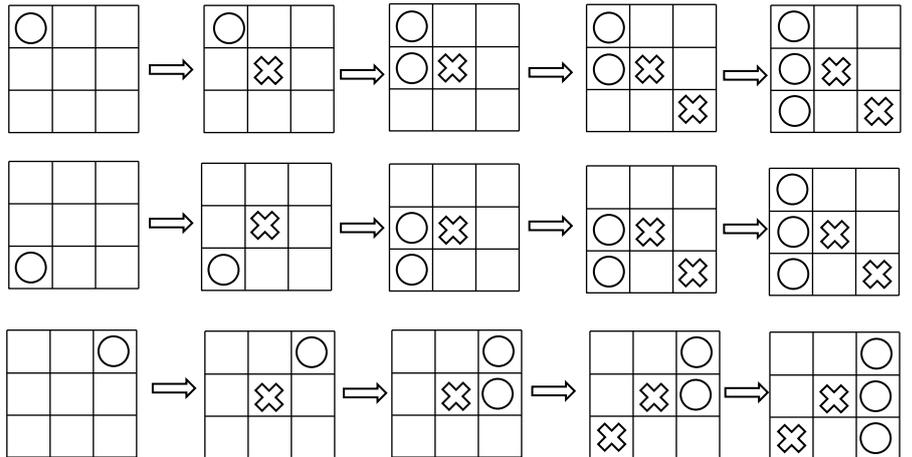
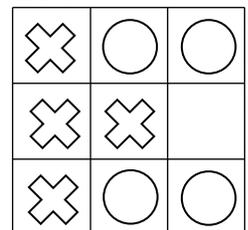


図3



(1) 8手目に図4の配置になって，後手が勝ちました。このとき，○×を書く手順は何通り考えられますか。

図4



(2) 8手目に後手が勝ったときの○×の配置として考えられるものは何通りありますか。

(3) 8手目に後手が勝ったときの○×を書く手順として考えられるものは何通りありますか。

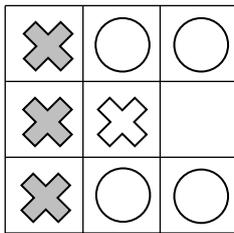


最難関問題

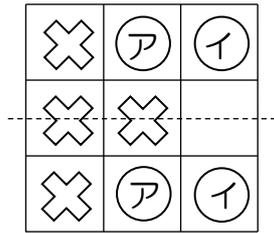
3目並べ・2・8手 (1) 216通り (2) 23通り (3) 9072通り

(1) 回転や裏返しによって重なるかどうかをいったん無視すると、8手目で図①のような配置になる場合、先手が○を書く手順は、 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (通り) です。後手については、影をつけたたて一列の×が6手目にそろってしまうとそこでゲームが終わってしまうので、 $4 \times 3 \times 2 \times 1 - 3 \times 2 \times 1 = 18$ (通り) です。よって、 $24 \times 18 = 432$ (通り) となります。ここから、回転や裏返しによって重なる場合を考えます。8手目の○×の配置は図②のように線対称になっているので、1手目で先手がアのどちらかの○を書いた場合、裏返すと以降の○×の書く順番は一致します。2手目以降は残りの○×の配置の対称性が敗れるので、手順の重複は起こりません。1手目で先手がイのどちらかの○を書いた場合も同様です。

図①



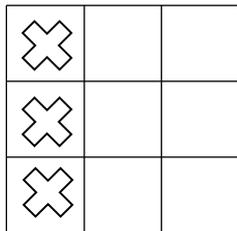
図②



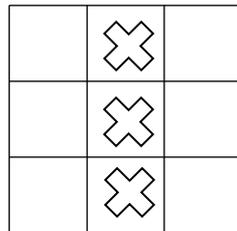
よって、1手目でアのどちらか、イのどちらかを書いた場合の重複を考えて、 $432 \div 2 = 216$ (通り) です。

(2) 回転や裏返しによる重複を考えると、×の一行の並び方は、図③～⑤の3通りを考えればよいこととなります。

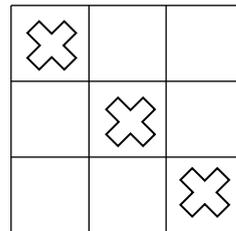
図③



図④



図⑤



最難関問題

図③の場合、残りの×の配置は、裏返しによる重複を考えると図⑥～⑨の4通りです。

図⑥

×	×	ア
×		イ
×		ウ

図⑦

×	ア	×
×	イ	
×	ウ	

図⑧

×		ア
×	×	イ
×		ア

図⑨

×	ア	
×	イ	×
×	ア	

残りの5つのマスのうち1マスは空になるので、空になるマスの位置を考えます。この際、○が一行に並ばないように注意します。すると、図⑥および⑦の場合はア、イ、ウの3通り、図⑧および⑨の場合は、裏返しによる重複を考えてアとイの2通りです。よって、 $(3 + 2) \times 2 = 10$ (通り) です。

図④の場合、残りの×の配置は、回転や裏返しによる重複を考えると図⑩、⑪の2通りです。

図⑩

×	×	ア
	×	イ
	×	ウ

図⑪

	×	ア
×	×	イ
	×	ア

空になるマスの位置は、図⑩ではア、イ、ウの3通り、図⑪では、裏返しによる重複を考えてアとイの2通りです。よって、 $3 + 2 = 5$ (通り) です。

図⑤の場合、残りの×の配置は、裏返しによる重複を考えると図⑫、⑬の2通りです。

図⑫

×	×	ア
イ	×	ウ
エ	オ	×

図⑬

×	ア	×
イ	×	ア
ウ	イ	×

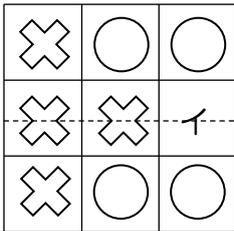
空になるマスの位置は、図⑫ではア～オの5通り、図⑬では、裏返しによる重複を考えてア、イ、ウの3通りです。よって、 $5 + 3 = 8$ (通り) です。

以上より、 $10 + 5 + 8 = 23$ (通り) です。

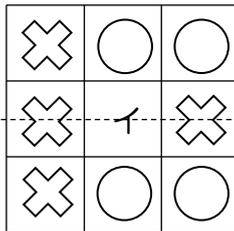
最難関問題

(3) (2) で考えた 2 3 通りの ○× の配置のうち、線対称になっているものは、図⑧のイ、図⑨のイ、図⑪のイ、図⑬のウの 4 通りで、○を書きこむと以下の図⑭～⑰になります。点対称になっているものはありません。線対称であれば裏返しによって重なります。

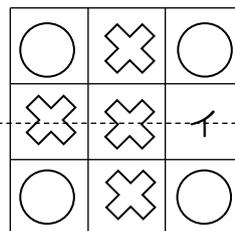
図⑭



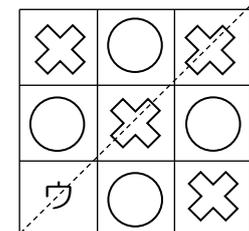
図⑮



図⑯



図⑰



図⑭は (1) で考えた通り 2 1 6 通りであり、図⑮～⑰も同様にして 2 1 6 通りですから、あわせて (4 × 2 1 6) 通りです。

残りの 2 3 - 4 = 1 9 (通り) の配置については、2 4 × 1 8 = 4 3 2 (通り) ですから、全部で $4 \times 2 1 6 + 1 9 \times 4 3 2 = (2 + 1 9) \times 4 3 2 = 9 0 7 2$ (通り) です。