

最難関問題

出会う回数

東西にまっすぐのびた道に何人かが立っています。ただし、同じ場所には立っていません。合図とともに、全員同じ速さで、それぞれが東か西に向かいます。他の人と出会うと、向きを反対にして進みます。

Aさん、Bさん、Cさんの3人の場合、出会う回数は最も少なくて図1の0回です。最も多い場合、例えば図2のようにまずAさんとBさんが出会い、次に向きを変えたBさんとCさんが出会って、2回です。

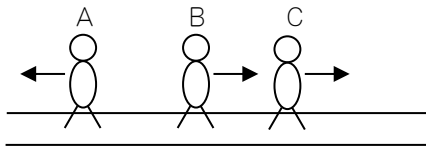


図1

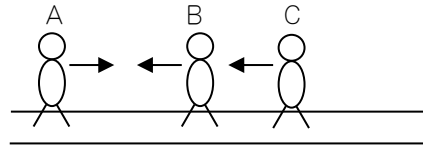


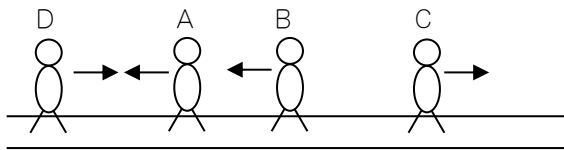
図2

- (1) 4人の場合、出会う回数は最も多くて何回ですか。
- (2) 5人の場合、出会う回数は最も多くて何回ですか。
- (3) 6人の場合、出会う回数は最も多くて何回ですか。
- (4) 10人の場合、出会う回数は最も多くて何回ですか。
- (5) 出会う回数が最も多くて10100回になるのは、何人の場合ですか。

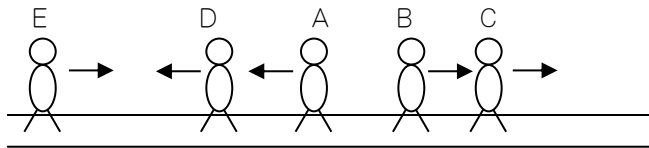
最難関問題

出会う回数 (1) 4回 (2) 6回 (3) 9回 (4) 25回 (5) 201人

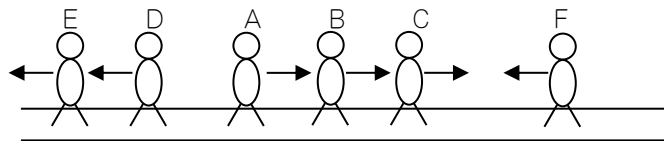
(1) 問題文の図2において2回出会ったあと、Aさん、Bさん、Cさんの3人は下図のように進みます。ここで、Dさんが図のように進むと、まずDさんとAさんが出会い、次にAさんとBさんが出会います。よって、 $2 + 2 = 4$ (回) です。



(2) (1) において4人が4回出会ったあと、Eさんが下図のように進むと、まずEさんとDさんが、次にDさんとAさんが出会います。(1) より2回増えるので、 $4 + 2 = 6$ (回) です。



(3) (2) において5人が6回出会ったあと、Fさんが図のように進むと、FさんとCさん、CさんとBさん、BさんとAさんの順に3回の出会いがあります。よって、 $6 + 3 = 9$ (回) です。



最難関問題

(4) ここまででわかったことをまとめると、以下のようになります。

3人から4人に増える場合… $3 = 1 + 2$ であり、2人が向かった方向から4人目が進んでくると、2回
出会增加るので、 $2 + 2 = 4$ (回)

4人から5人に増える場合… $4 = 2 + 2$ であり、2人が向かった方向から5人目が進んでくると、2回
出会增加るので、 $4 + 2 = 6$ (回)

5人から6人に増える場合… $5 = 2 + 3$ であり、3人が向かった方向から6人目が進んでくると、3回
出会增加るので、 $6 + 3 = 9$ (回)

同様にして、6人が7人に増える場合、 $9 + 3 = 12$ (回)、7人が8人に増える場合、 $12 + 4 = 16$ (回)、8人が9人に増える場合、 $16 + 4 = 20$ (回)、9人が10人に増える場合、 $20 + 5 = 25$ (回)となります。

(5) 人数が偶数の場合、2人では1回、4人では $1 + 1 + 2 = 1 + 3 = 4$ (回)、6人では $4 + 2 + 3 = 4 + 5 = 9$ (回)、8人では $9 + 3 + 4 = 8 + 7 = 16$ (回)、10人では $16 + 4 + 5 = 16 + 9 = 25$ (回)となっています。1, 3, 5, 7, …と1から順に奇数を順に加えていくと平方数となることから、 $2 \times n$ 人のときは $n \times n$ 回となることがわかります。

人数が、奇数 $2 \times n + 1$ の場合、 $n \times n$ 回から n 回増えるので、 $n \times n + n = n \times (n + 1)$ 回です。
 $10100 = 100 \times 101$ より、 $n = 100$ ですから、人数は $2 \times 100 + 1 = 201$ (人)です。