受験算数の基礎

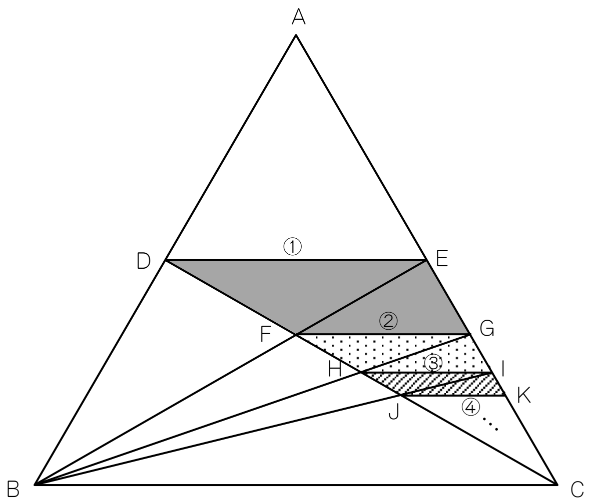
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

三角形の調和数列的分割

正三角形ＡＢＣの内部に，辺ＢＣと平行な線ＤＥを下の図のように引きます。
次に，ＤＣとＥＢの交点をＦとし，Ｆを通って辺ＢＣと平行で辺ＡＣと交わる線ＦＧを引きます。
次に，ＦＣとＧＢの交点をＨとし，Ｈを通って辺ＢＣと平行で辺ＡＣと交わる線ＨＩを引きます。
次に，ＨＣとＩＢの交点をＪとし，Ｊを通って辺ＢＣと平行で辺ＡＣと交わる線ＪＫを引きます。

以降も同様に辺ＢＣと平行で辺ＡＣと交わる線を引いていきます。これらの線を，ＤＥから順番に，下の図のように①，②，③，④，…の線とよびます。また，台形ＤＥＧＦを①と②に囲まれた台形，台形ＦＧＩＨを②と③に囲まれた台形，…とよぶことにします。



（１）①の線の長さが辺ＢＣの長さの$\frac{1}{2}$倍のとき

（ア）③の線の長さは辺ＢＣの長さの何倍ですか。

（イ）③と④に囲まれた台形の面積は，三角形ＡＢＣの面積の何倍ですか。

（２）①の線の長さが辺ＢＣの長さの$\frac{3}{8}$倍のとき，⑨と⑩に囲まれた台形の面積は，三角形ＡＢＣの面積の何倍ですか。

最難関問題

三角形の調和数列的分割　（１）（ア）$\frac{1}{4}$倍　（イ）$\frac{9}{400}$倍　（２）$\frac{603}{250880}$倍

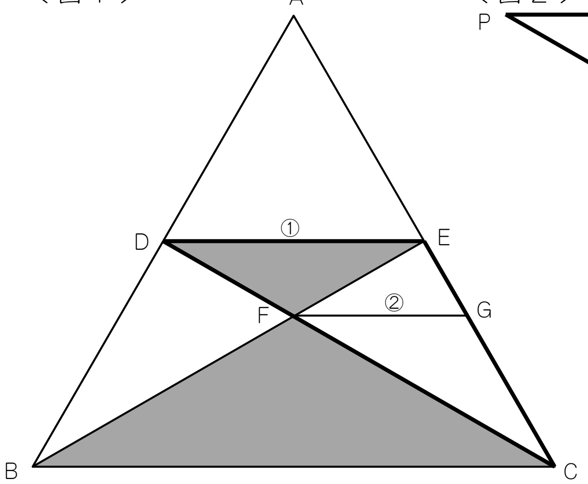
（１）

（ア）＜図１＞のかげをつけた三角形は１：２の相似なので，ＤＦ：ＦＣ＝１：２，ＤＣ：ＦＣ＝３：２なので，②の線の長さは辺ＢＣの長さの，$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$（倍）です。同様に，③の線の長さは辺ＢＣの長さの，$\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$（倍）です。

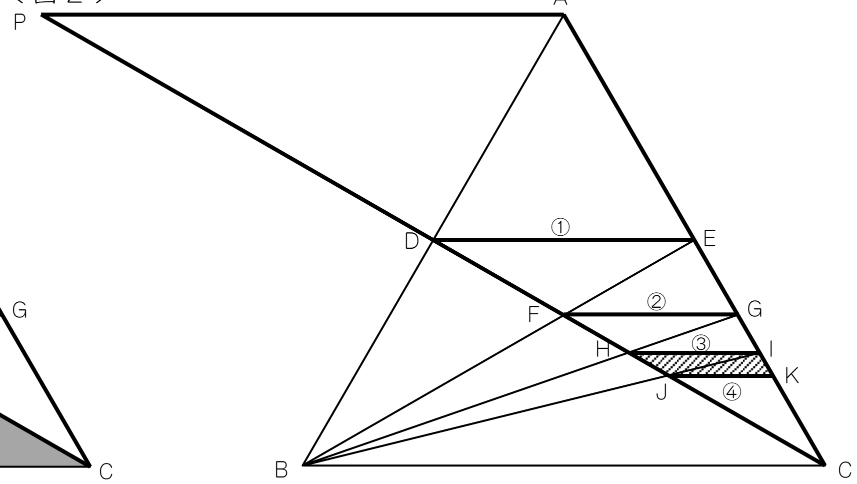
（イ）④の線の長さは辺ＢＣの長さの，$\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$（倍）です。＜図２＞のように三角形ＡＰＣを作り，太線で示した部分の三角形の相似を考えると，ＩＣは辺ＡＣの$\frac{1}{4}$の長さ，ＫＣはＡＣの$\frac{1}{5}$の長さなので，ＩＫの長さは辺ＡＣの長さの，$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$（倍）です。

　よって，③と④で囲まれた台形の面積は三角形ＡＢＣの面積の，$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\times\frac{1}{20}=\frac{9}{400}$（倍）です。

＜図１＞



＜図２＞



最難関問題

（２）①の線の長さは辺ＢＣの長さの$\frac{3}{8}$倍，②の線の長さは辺ＢＣの長さの$\frac{3}{8}\times\frac{8}{11}=\frac{3}{11}$（倍）です。

同様に，③の線の長さは辺ＢＣの長さの$\frac{3}{11}\times\frac{11}{14}=\frac{3}{14}$（倍），④の線の長さは辺ＢＣの線の長さの$\frac{3}{17}$倍，…となって，$\frac{3}{8}$，$\frac{3}{11}$，$\frac{3}{14}$，$\frac{3}{17}$，…と，分子が３で分母が８からはじまる差が３の等差数列になります。よって，⑨は$\frac{3}{32}$倍，⑩は$\frac{3}{35}$倍です。

＜図３＞のＡＰの長さは，辺ＢＣの長さの$1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$（倍）です。太線で示した部分の三角形の相似を考えると，ＩＣは辺ＡＣの長さの$\frac{3}{32}\div\frac{3}{5}=\frac{5}{32}$（倍），ＫＣはＡＣの長さ$\frac{3}{35}\div\frac{3}{5}=\frac{1}{7}$（倍）なので，ＩＫの長さは辺ＡＣの長さの，$\frac{5}{32}-\frac{1}{7}=\frac{3}{224}$（倍）です。

よって，⑨と⑩で囲まれた台形の面積は三角形ＡＢＣの面積の，

$\left(\frac{3}{32}+\frac{3}{35}\right)\times\frac{3}{224}=\frac{603}{250880}$（倍）です。

＜図３＞