受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

レーザー光線と小立方体のアドレス・２

１辺が１㎝の小立方体をすき間なく積んで，図１のような直方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨを作ります。対角線ＡＧ上をＡからＧに向けて進む点Ｐが通過する小立方体について，考えます。また，図２のように，後ろから２行目，左から３列目，上から４段目の小立方体を，（２，３，４）と表すことにします。

図１

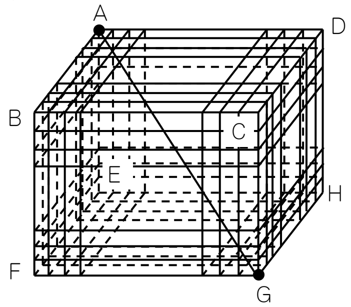
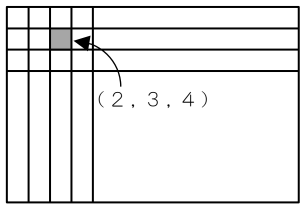


図２　（上から４段目）



（１）ＡＢ＝７０㎝，ＡＤ＝１０５㎝，ＡＥ＝３０㎝のとき，点Ｐが２０番目，１００番目に通過する小立方体を，（ａ，ｂ，ｃ）の形でそれぞれ答えなさい。

（２）ＡＢ＝５㎝，ＡＤ＝６㎝で，点Ｐが１４番目に通過する小立方体が，（３，３，１１）のとき，ＡＥの長さとして考えられるものをすべてこたえなさい。

（３）点Ｐが１１３番目に（４６，５２，３９）の小立方体を通過しました。直方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨの体積として考えられるもののうち，最も小さいものを答えなさい。

最難関問題

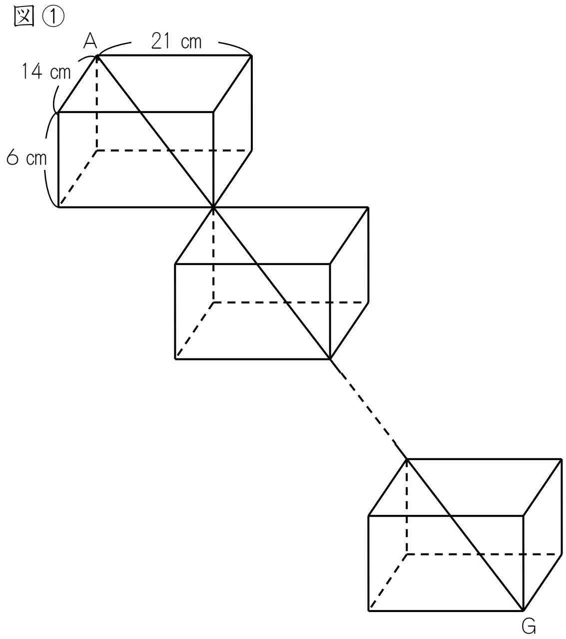
レーザー光線と小立方体のアドレス・２

（１）２０番目…（１０，１４，４），１００番目…（４７，７０，２０）

（２）ＡＥ＝２１㎝，２７㎝　（３）１４５８００$㎝^3$

（１）７０，１０５，３０を最大公約数の５で割ると，１４，２１，６になり，対角線ＡＧは図①のように１４㎝，２１㎝，６㎝の直方体の通過を５回繰り返します。

図①



点Ｐが１秒間で，１４㎝，２１㎝，６㎝の直方体を通過すると考えると，１行目・１列目・１段目の立方体から行・列・段が進むのは，

行…$\frac{1}{14}$，$\frac{2}{14}$，…，$\frac{13}{14}$秒後

列…$\frac{1}{21}$，$\frac{2}{21}$，…，$\frac{20}{21}$秒後

段…$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$，…，$\frac{5}{6}$秒後です。

$\frac{1\sim6}{7}$，$\frac{1,\ 2}{3}$，$\frac{1}{2}$秒後は重複しているので，

１＋１３＋２０＋５－９＝３０（個）の小立方体を通過します。順に並べると，

$\frac{1}{21}$，$\frac{1}{14}$，$\frac{2}{21}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{4}{21}$，$\frac{3}{14}$，$\frac{5}{21}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{5}{14}$，$\frac{8}{21}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{10}{21}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{11}{21}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{13}{21}$，$\frac{9}{14}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{16}{21}$，$\frac{11}{14}$，$\frac{17}{21}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{6}{7}$，$\frac{19}{21}$，$\frac{13}{14}$，$\frac{20}{21}$秒後です。点Ｐが２０番目に通過する小立方体は，$\frac{9}{14}$秒経過した後なので，（１，１，１）から９行，１３列，３段進んで，（１０，１４，４）です。また，点Ｐが１００番目に通過する小立方体は，１００÷３０＝３余り１０より，３＋１＝４（回目）に通過する１４㎝，２１㎝，６㎝の直方体のうちの１０番目の小立方体です。１番目の小立方体は，１４×３＋１＝４３，２１×３＋１＝６４，６×３＋１＝１９より，（４３，６４，１９）で，１０番目に通過する小立方体は，そこから$\frac{2}{7}$秒経過した後なので，４行，６列，１段進んで，（４７，７０，２０）です。

最難関問題

（２）点ＰがＡからＧまで１秒間で進むと考えると，行・列・段が進む時間は，以下のようになります。

$$\frac{1}{5} \qquad \frac{2}{5} \quad \vdots \quad \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{6} \qquad \frac{2}{6} \quad \vdots \quad \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{AE} \cdots\cdots \frac{10}{AE} \quad \vdots \quad \frac{11}{AE}$$

（３，３，１１）

このとき，$\frac{10}{AE}<\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$が成り立つので，２０＜ＡＥとなるので，ＡＥは２１以上です。また，$\frac{2}{5}<\frac{11}{AE}$が成り立つので，２×ＡＥ＜５×１１，ＡＥ＜２７.５となるので，ＡＥは２７以下です。

１＋２＋２＋１０＝１５，１５－１４＝１より，分数の列$\frac{1}{AE}\cdots\frac{10}{AE}$の中に１つだけ$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{2}{6}$に等しい分数があればよいので，ＡＥ＝２１のときの$\frac{7}{21}=\frac{2}{6}$，ＡＥ＝２７のときの$\frac{9}{27}=\frac{2}{6}$です。

（３）点ＰがＡからＧまで１秒間で進むと考えると，行・列・段が進む時間は，以下のようになります。

$$\frac{1}{AB} \cdots\cdots \frac{45}{AB} \quad \vdots \quad \frac{46}{AB}$$

$$\frac{1}{AD} \cdots\cdots \frac{51}{AD} \quad \vdots \quad \frac{52}{AD}$$

$$\frac{1}{AE} \cdots\cdots \frac{38}{AE} \quad \vdots \quad \frac{39}{AE}$$

（４６，５２，３９）

１＋４５＋５１＋３８＝１３５，１３５－１１３＝２２より，分数の列$\frac{1}{AB}\cdots\frac{45}{AB}$，$\frac{1}{AD}\cdots\frac{51}{AD}$，$\frac{1}{AE}\cdots\frac{38}{AE}$には２２の重複があります。ここで仮に，$\frac{2}{AB}=\frac{3}{AD}$とすると，$\frac{4}{AB}=\frac{6}{AD}$，$\frac{6}{AB}=\frac{9}{AD}\cdots$も成立しますが，最終的には$\frac{44}{AB}=\frac{66}{AD}$となって，$\frac{45}{AB}<\frac{52}{AD}$という大小関係と矛盾します。

最難関問題

このような矛盾を起こさない組み合わせは色々と考えることができます。例えば，$\frac{31}{AB}=\frac{50}{AD}$の１組だけが重複する場合，$\frac{20}{AB}=\frac{21}{AD}$，$\frac{40}{AB}=\frac{42}{AD}$の２組だけが重複する場合などです。ただし，大小関係として，$\frac{45}{AB}<\frac{52}{AD}$から$\frac{AD}{AB}<\frac{52}{45}$，$\frac{51}{AD}<\frac{46}{AB}$から$\frac{51}{46}<\frac{AD}{AB}$が成立しているので，厳密に計算するというよりも，こちらの範囲とも両立しそうなあたりで答えの候補を考えていきます。そうすると，$\frac{9}{AB}=\frac{10}{AD}$，$\frac{18}{AB}=\frac{20}{AD}$，…，$\frac{45}{AB}=\frac{50}{AD}$の５組を考えることができます。

次に，$\frac{1}{AD}\cdots\frac{51}{AD}$，$\frac{1}{AE}\cdots\frac{38}{AE}$の間の重複を考えます。$\frac{5}{AD}=\frac{4}{AE}$とすると，$\frac{50}{AD}=\frac{40}{AE}$となってしまうのでうまくいきません。$\frac{4}{AD}=\frac{3}{AE}$とすると，$\frac{4}{AD}=\frac{3}{AE}$，…，$\frac{48}{AD}=\frac{36}{AE}$の１２組が重複します。

このとき，$\frac{1}{AB}\cdots\frac{45}{AB}$，$\frac{1}{AE}\cdots\frac{38}{AE}$の間の重複は，$\frac{18}{AB}=\frac{20}{AD}=\frac{15}{AE}$となることから，$\frac{6}{AB}=\frac{5}{AE}$となって，$\frac{6}{AB}=\frac{5}{AE}$，…，$\frac{42}{AB}=\frac{35}{AE}$の７組が重複します。

$\frac{18}{AB}=\frac{20}{AD}=\frac{15}{AE}$と$\frac{36}{AB}=\frac{40}{AD}=\frac{30}{AE}$はそれぞれ１回余計に数えられているので，
$5+12+7-2=22$となって，重複の数が一致します。よって，
$AB:AD:AE=18:20:15$です。（４６，５２，３９）の小立方体があるということから，
最小の直方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨは$AB=54$㎝，$AD=60$㎝，$AE=45$㎝で，その体積は，
$54\times60\times45=145800$（$cm^3$）です。