

最難関問題

根基10の整数と6の整数

(1) 10, 20, 40, 50, 80, 100, 160, …のように, 素因数分解をしたときに素数の2と5が1個以上現れ, それ以外の素数が現れない整数を, $2 \times 5 = 10$ より, 根基が10の整数といいます。

- ① 根基が10である5桁の整数は何個ありますか。
- ② 根基が10である5桁以下の整数は何個ありますか。

(2) 素因数分解をしたときに素数の2と3が1個以上現れ, それ以外の素数が現れない整数を, $2 \times 3 = 6$ より, 根基が6の整数といいます。

- ① 根基が6である5桁以下の整数は何個ありますか。
- ② 根基が6である整数のうち, 小さいほうから43番目のものを答えなさい。

最難関問題

根基10の整数と6の整数 (1) ① 19個 ② 47個 (2) ① 74個 ② 7776

(1) 根基が10の整数を素因数分解すると、 $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ 個}} \times \underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{m \text{ 個}}$ となります。

ここで、 $n > m$ の場合、整数は、 $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n-m \text{ 個}} \times \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{m \text{ 個}}$ となって、

2だけをかけあわせた数に0がいくつか続きます。例えば、1280000です。

$n < m$ の場合、整数は、 $\underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{m-n \text{ 個}} \times \underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{n \text{ 個}}$ となって、5だけをかけあわせた数に

0がいくつか続きます。例えば、62500000です。

$n = m$ の場合は、10, 100, 1000のように1の後に0がいくつか並ぶ数になります。

① 根基が10の5桁の整数の場合、0が一の位から1~4個並びます。

0が1個

10240, 20480, 40960, 81920,
31250

0が2個

12800, 25600, 51200,
12500, 6250

0が3個

16000, 32000, 64000,
25000,

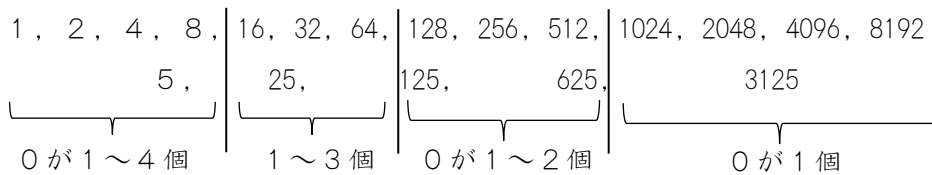
0が4個

20000, 40000, 80000,
50000,
10000

以上より、19個です。

最難関問題

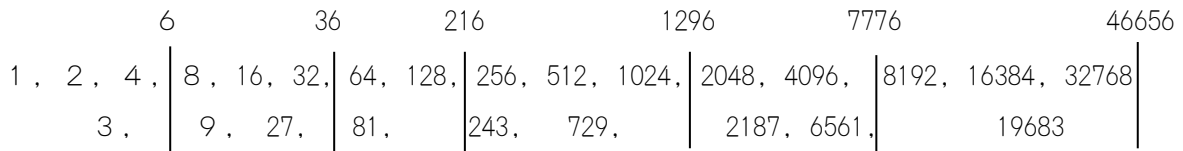
② 根基が10の整数 $\square 00 \dots 0 \square$ には、2をいくつかかけ合わせた数か、5をいくつかかけ合わせた数か、1が入ります。 \square に入る数ごとに、1の位から続く0の個数を数えると、次のようになります。



よって、 $5 \times 4 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + 5 \times 1 = 47$ (個) です。

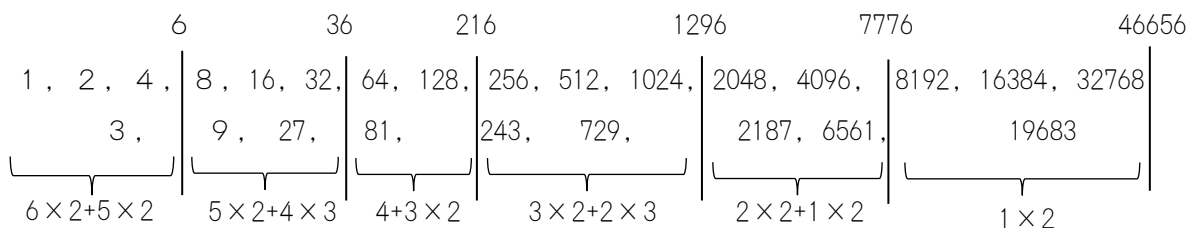
(2) 根基が6の整数は、 $2 \times 2 \times \dots \times 2 \times 6 \times 6 \times \dots \times 6$ か、 $3 \times 3 \times \dots \times 3 \times 6 \times 6 \times \dots \times 6$ か、 $1 \times 6 \times 6 \times \dots \times 6$ の形になります。

① $6 \times 6 \times \dots \times 6$ の形の数ごとに区切って、 $2 \times 2 \times \dots \times 2$ と $3 \times 3 \times \dots \times 3$ の形の数を並べると、次のようになります。

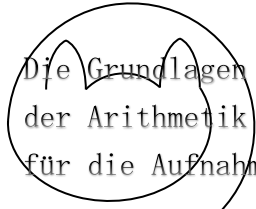


たとえば6未満の数である1, 2, 3, 4は、6, 36, 216, 1296, 7776をかけても、46656未満なので、5桁以下になります。また、1と2は46656をかけても5桁です。よって、1と2は6を1個~6個、3と4は6を1個~5個かけられるので、 $6 \times 2 + 5 \times 2 = 22$ (個) の根基6の整数ができます。

また、6より大きく36未満の数である8, 9, 16, 27, 32は、6, 36, 216, 1296をかけても、46656未満なので、5桁以下になります。また、8と9は7776をかけても5桁です。よって、8と9は6を1個~5個、16と27と32は6を1個~4個かけられるので、 $5 \times 2 + 4 \times 3 = 22$ (個) の根基6の整数ができます。



以上の和を求めて、74個です。



最難関問題

② 6以上36未満の根基6の整数は、1, 2, 3, 4に6をかけた6, 12, 18, 24の4個の整数です。36以上216未満の根基6の整数は、6, 12, 18, 24および、8, 9, 16, 27, 32に6をかけた、 $4 + 5 = 9$ (個)の整数です。以降も同様です。

6	36	216	1296	7776	46656
1, 2, 4,	8, 16, 32,	64, 128,	256, 512, 1024,	2048, 4096,	8192, 16384, 32768
3,	9, 27,	81,	243, 729,	2187, 6561,	19683
	4 個	$4+5 = 9$ (個)	$9+3 = 12$ (個)	$12+5 = 17$ (個)	

$4 + 9 + 12 + 17 = 42$ (個) より、43番目の整数は、 $1 \times 7776 = 7776$ です。