受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

２の累乗数の三角数表

　下のように数を並べていきます。

１段目…１
２段目…２　３
３段目…４　５　６
４段目…８　９　10　11
５段目…16　17　18　19　20
６段目…32　33　34　35　36　37
　…

（１）７段目の右端の数を答えなさい。

（２）上のように数を並べていったときに現れない２０５０以下の整数は，何個ありますか。

（３）ある段の右端の数と，その１つ下の段の右端の数の差が１０２５になりました。ある段は何段目ですか。

（４）１０００段目の右端の数と，ある段の右端の数の差が３の倍数になりました。ある段の段数として考えられるものを，小さい順に３つ答えなさい。

最難関問題

２の累乗数の三角数表

（１）７０　（２）１９８１個　（３）１１段目　（４）４段目，５段目，１０段目

（１）各段の左端の数は，１，２，４，８，１６，３２，と上の段の数の２倍になっています。７段目の左端の数は３２×２＝６４で，７段目には７個の数が並ぶので，６４＋７－１＝７０です。

（２）各段の左端の数を並べていくと，

１，２，４，８，１６，３２，６４，１２８，２５６，５１２，１０２４，２０４８，…

となります。１０２４が左端の数である１１段目までで，（１＋１１）×１１÷２＝６６（個）の数が並び，１２段目で２０４８，２０４９，２０５０の３個が並びます。よって，現れない数は，

２０５０－（６６＋３）＝１９８１（個）です。

（３）△段目と△＋１段目を比べると，次のようになります。

△段目…□　□＋１　…　□＋△－１

△＋１段目…□×２　□×２＋１　…　□×２＋△

右端の数の差は□＋１となります。□＋１＝１０２５より，

□＝１０２４＝２×２×２×２×２×２×２×２×２×２となるので，１１段目です。

（４）（３）に続けて△＋２段目の右端を考えると，次のようになります。

△段目…□　□＋１　…　□＋△－１

△＋１段目…□×２　□×２＋１　…　□×２＋△

△＋２段目…□×４　□×４＋１　…　□×４＋△＋１

よって，△段目と△＋１段目の右端の数の差は□×１＋１，

△＋１段目と△＋２段目の右端の数の差は□×２＋１，となり，同様にして，

△＋２段目と△＋３段目の右端の数の差は□×４＋１，

△＋３段目と△＋４段目の右端の数の差は□×８＋１，…となります。

このことから，△段目との差を考えると，

△段目と△＋１段目の右端の数の差は□×１＋１，

△段目と△＋２段目の右端の数の差は□×（１＋２）＋２＝□×３＋２，

△段目と△＋３段目の右端の数の差は□×（１＋２＋４）＋３＝□×７＋３，

△段目と△＋４段目の右端の数の差は□×（１＋２＋４＋８）＋４＝□×１５＋４，

△段目と△＋５段目の右端の数の差は□×３１＋５，

△段目と△＋６段目の右端の数の差は□×６３＋６，

△段目と△＋７段目の右端の数の差は□×１２７＋７，…となります。

最難関問題

　これらの右端の数の差が３の倍数かどうかを考えていきます。□に入る数は１，２，４，８，…という，１に２をいくつかかけた数です。

　□×１＋１…１×１＋１＝２，２×１＋１＝３，４×１＋１＝５，８×１＋１＝９，…となって，
　２や８のように１に２を奇数個かけた数の場合は，３の倍数になります。

　□×３＋２…□×３が３の倍数で２は３の倍数ではないので，□×３＋２は３の倍数にはなりません。

　□×７＋３…□×７が３の倍数ではなく，３は３の倍数なので，□×７＋３は３の倍数には
　なりません。

□×１５＋４…□×１５が３の倍数で４は３の倍数ではないので，□×１５＋４は３の倍数には
　なりません。

□×３１＋５…１×３１＋５＝３６，２×３１＋５＝６７，４×３１＋５＝１２９，
　８×３１＋５＝２５３，…となって，１や４のように１に２を偶数個（０個も含みます）
　かけた数の場合は，３の倍数になります。

□×６３＋６…□×６３が３の倍数で６は３の倍数なので，□×６３＋６は必ず３の倍数になります。

　これ以降についてですが，□×Ａ＋ＢのＡは３で割って１余る数と３の倍数が交互に現れ，Ｂは６で割ったときの余りが１，２，３，４，５，０の数が繰り返し現れるので，□×Ａ＋Ｂが３の倍数かどうかについては，以上の６個のパターンのくり返しとなります。

　よって，１０００段目から，６の倍数段離れた段については，それぞれの右端の整数の差は３の倍数となります。この条件を満たすのは，１０００÷６＝１６６余り４より，４段目，１０段目，１６段目，…です。

　また，１０００段目の左端の数は２を９９９個かけあわせた数なので，
１０００段目から６の倍数＋１段離れた段も，６の倍数＋５段離れた段も，左端の数は２を偶数個かけあわせた数となります。よって，６の倍数＋５段離れた段に対しては，右端の整数の差が３の倍数となります。この条件を満たすのは，５段目，１１段目，１７段目，…です。

　以上より，４段目，５段目，１０段目です。