受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

７と合同な素数

（１）２と３を除く素数は全て，６で割ったときの余りが１か５です。その理由を簡単に説明しなさい。

（２）２００以下の素数は以下の通りです。

２，３，５，７，１１，１３，１７，１９，２３，２９，３１，３７，４１，４３，４７，５３，５９，
６１，６７，７１，７３，７９，８３，８９，９７，１０１，１０３，１０７，１０９，１１３，
１２７，１３１，１３７，１３９，１４９，１５１，１５７，１６３，１６７，１７３，１７９，
１８１，１９１，１９３，１９７，１９９

８００以上１０００以下の，６で割ったときの余りが１である素数は何個ありますか。

最難関問題

７と合同な素数　（１）解説参照　（２）１３個

（１）６を素因数分解すると２×３なので，６で割って２か４余る数は２の倍数，３余る数は３の倍数となるため。

（２）６で割って１余る数を素因数分解すると，２と３以外の素数の積，つまり，６で割って５余る素数や１余る素数の積となります。例えば１３＝１３，２５＝５×５，９１＝７×１３です。

６で割って１余る数を［１］で表すと，［１］×［１］＝［１］です。つまり，１×１や7×１３等の積はみな，６で割ると余りが1になります。また，６で割って５余る数を［５］で表すと，［５］×［５］＝［１］です。５×５＝２５を６で割った余りが1であることから明らかです。また，［５］×［１］＝［５］です。よって，複数の［１］と［５］の積が［１］となるのは，［５］が含まれないか，偶数個含まれる場合です。

以上のことを利用して，８００以上１０００以下の［１］の素数の代わりに，［１］の合成数を数えます。［１］の合成数を素因数分解した場合に，［１］の素数が現れる場合と，［１］の素数が現れずに［５］の素数が偶数個現れる場合に分けて求めていきます。

［１］の素数が現れる場合

［１］の素数に，［１］の整数（ただし１を除く）をかけた積，つまり，

（［１］の素数）×７，１３，１９，２５，…，が，［１］の合成数になります。

１０００÷7＝１４２.…より，１４２以下の［１］の素数を並べると，以下のようになります。

７，１３，１９，３１，３７，４３，６１，６７，７３，７９，９７，１０３，１０９，
１２７，１３９

１３９から順に，重複に気を付けて調べていきます。

１３９×７，
１２７×７，
７３×１３，
６７×１３，
４３×１９，
３７×２５，
３１×３１，
~~１９×４３~~，１９×４９，
~~１３×６７~~，~~１３×７３~~，
７×１１５，７×１２１，~~７×１２７~~，~~７×１３３（＝７×７×１９）~~，

以上で１０個の合成数が見つかります。

最難関問題

［５］の素数のみが偶数個現れる場合

［５］の素数の最小は５なので，１０００÷５＝２００以下の［５］の素数を偶数個かける場合を考えます。２００以下の［５］の素数は以下の通りです。

５，１１，１７，２３，２９，４１，４７，５３，５９，７１，８３，８９，１０１，１０７，
１１３，１３１，１３７，１４９，１６７，１７３，１７９，１９１，１９７

［５］の素数を４個以上かける場合，最小は５×５×５×５＝６２５，２番目に小さいのは
５×５×５×１１＝１３７５なので，８００以上１０００以下の範囲には入りません。
２個かける場合は，以下の通りです。
５×１９７，５×１９１，５×１７９，５×１７３，５×１６７，
１１×８９，１１×８３，
１７×５３，
２３×４１，
２９×２９，

以上で１０個の合成数が見つかります。

８００以上１０００以下の［１］の整数は，
６×１３４＋１＝８０５から，６×１６６＋１＝９９７までの３３個あるので，
［５］の素数は，３３－１０×２＝１３（個）です。